Vierdimensionales Ray-Tracing in einer gekrümmten Raumzeit

Diplomarbeit
von
Corvin Zahn

Hauptberichter: Prof. Dr. H.-R. Trebin
Mitberichter: Prof. Dr. W. Weidlich

Institut für Theoretische und Angewandte Physik
Universität Stuttgart

Januar 1991

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Die Frage

Man nehme eine Kamera, setze sie an eine beliebige Stelle des Weltalls, und betätige den Auslöser.

Was ist nach dem Entwickeln auf dem Film zu sehen?

Diese Frage darf, schränkt man sie auf irdische Beobachtungsobjekte ein, als geklärt betrachtet werden. Heute ist jede bessere Grafikworkstation in der Lage, die dreidimensionale Beschreibung einer beliebigen Szene in ein zweidimensionales Abbild umzusetzen, das von der Wirklichkeit kaum zu unterscheiden ist.

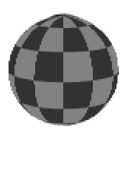
Unser Gehirn und die gängigen Computergrafikalgorithmen gehen beim Betrachten einer Szene allerdings davon aus, daß wir uns in einem euklidischen, flachen Raum befinden, daß Lichtstrahlen Geraden sind, daß sich alles, was wir sehen, „jetzt" gerade und gleichzeitig ereignet, daß die Zeit überall gleich schnell abläuft, daß wir die Farben des beobachteten Objekts so sehen „wie sie sind".

Diese Voraussetzungen sind bei astronomischen Beobachtungsobjekten nicht mehr erfüllt. In der Nähe „interessanter" kosmischer Objekte (z. B. Schwarzer Löcher) hat die Raumzeit eine völlig andere Struktur, als wir sie aus dem Alltag gewohnt sind. In der Umgebung massiver Sterne läuft das Licht auf gekrümmten Bahnen, so daß photografische Abbildungen erheblich verzerrt werden. Lorentzkontraktion und Aberration ergeben scheinbare Verdrehungen eines sich schnell bewegenden Körpers. Die Photonen, die ein Bild erzeugen, also gleichzeitig bei der Kamera ankommen, können je nach Entfernung des Emissionspunktes zu unterschiedlichen Zeiten gestartet sein und damit bei großen Objektgeschwindigkeiten völlig verschiedene Phasen einer zeitlichen Entwicklung repräsentieren. Farben werden durch die Gravitationsrotverschiebung, sowie die durch Relativbewegung von Kamera und Objekt verursachte Dopplerverschiebung verändert.

Die Arbeitsweise unseres Gehirns und die gängigen Computergrafikalgorithmen beruhen wie gesagt auf den oben genannten Voraussetzungen und führen daher zu falschen Ergebnissen. Wir werden also mit zwei grundlegenden Problemen konfrontiert:

- Wie kommen wir zu einem physikalisch korrekten Bild?
- Wie bringen wir unser Gehirn dazu, dieses Bild richtig zu interpretieren?

Der erste Punkt soll in dieser Arbeit näher beleuchtet werden. Es wird notwendig, die Entstehung eines Bildes noch einmal vom physikalischen Standpunkt aus gründlich zu untersuchen. Der zweite Punkt muß leider jedem Leser selbst überlassen werden.



1.2 Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine universelle Methode zu entwickeln (und als Programm zu implementieren), um von einer als Ansammlung von *Weltröhren* gegebenen Szene, die sich in einer beliebigen gegebenen *Metrik* befindet, einen Computer-Film zu berechnen, den eine auf einer ebenfalls gegebenen *Weltlinie* befindliche Filmkamera aufnehmen würde.

Zur Realisierbarkeit eines solchen Projekts ist zu sagen, daß die Computertechnologie erst seit kurzem die Möglichkeiten bietet, den enormen Rechenaufwand (im Rahmen dieser Arbeit wurden ca. 10^{10} Bildpunkte berechnet) in finanzierbarem und erlebbarem Rahmen zu halten.

1.3 Motivation

In der Physik ist man immer bemüht, eine Aussage *kovariant* zu formulieren, d. h. sie so zu fassen, daß sie unabhängig von einer willkürlichen Koordinatenwahl wird. Dies führt dazu, daß physikalische Größen mit mathematischen Konzepten wie etwa dem des *Tensorfeldes* beschrieben werden.

Wir haben aber leider weder Sinnesorgane noch Meßgeräte, um Tensorfelder größer als nullter Stufe direkt zu erfassen[1]. Wollen wir eine anschauliche, d. h. eine unseren Sinnesorganen zugängliche, und nachmeßbare, d. h. unseren Meßgeräten zugängliche Beschreibung eines physikalischen Vorgangs, so müssen wir uns mit den Komponenten dieses Tensorfeldes, also den Projektionen auf eine frei wählbare Basis begnügen. Daß diese — im Grunde willkürlichen — Zahlen für das *Verständnis* der Physik keinen großen Wert haben, ist klar.

Außerdem müssen wir unsere Kleinheit im Vergleich zu den Beobachtungsobjekten beachten. Wir sind nicht in der Lage, ein Tensorfeld als Ganzes zu erfassen. Direkt zugänglich ist uns nur der Wert des Feldes, also ein Tensor, an dem Ort, an dem wir uns gerade befinden.

Für eine anschauliche *und* kovariante Beschreibung bleiben uns also nur noch Tensoren nullter Stufe, die *Skalare*. Genauer gesagt, skalare Funktionen der Eigenzeit des Beobachters. Die Sinneszellen unseres Körpers sind gebaut, um solche Skalare (Temperatur, Helligkeit, Farbe, Schallpegel ...) zu registrieren.

Da ein Skalar einfach eine Zahl ist und dementsprechend wenig Informationsgehalt hat, stellt sich die Frage, welches Sinnesorgan am besten geeignet ist, um eine große Informationsmenge, bestehend aus vielen Skalaren, aufzunehmen.

Die Antwort ist klar. Unser Auge hat einige Millionen Sehzellen und ist demzufolge in der Lage, „mit einem Blick“ einige Millionen Skalare zu erfassen. Ein mit dem Auge oder einer Kamera aufgenommenes Bild bietet also die Kovarianz eines Skalars bei millionenfacher Informationsdichte.

[1] Anmerkung: Die vom Auge wahrgenommenen *Farben* sind prinzipiell Elemente eines dreidimensionalen Vektorraums (s. Abschnitt 7.6). Da dieser Vektorraum kein Unterraum unserer Raumzeit ist, können wir die Farbwahrnehmung in Bezug auf Koordinatentransformationen innerhalb der Raumzeit als Skalar betrachten.

Berücksichtigen wir noch unsere Fähigkeit, einen *zeitlichen* Ablauf zu erfassen, kommen wir zu folgender These:

> **Ein von einer realen oder simulierten Filmkamera aufgenommener Film ist die beste Möglichkeit, einen physikalischen Vorgang anschaulich und kovariant darzustellen.**
>
> **Mit „anschaulich“ ist gemeint, daß wir das Sinnesorgan mit der größten Informationsdichte, den Sehsinn, mit einer von Kindesbeinen an geübten Methode der Bildverarbeitung, nämlich die Erfassung der Raumzeit-Struktur unserer Umwelt, nutzen.**
>
> **Mit „kovariant“ ist gemeint, daß die Darstellung unabhängig von einem Koordinatensystem ist, da nur skalare Größen, Helligkeit und Farbe, abgebildet werden.**

Damit wäre eine wissenschaftstheoretische Rechtfertigung für eine aus reiner Neugier, Spieltrieb und Freude an bunten Bildern begonnene Arbeit gefunden.

Natürlich gibt es auch eine Reihe von „praktischen“ Anwendungen der entwickelten Verfahren. Zu nennen wäre etwa:

- Die Diagnostik beim Entwickeln und Austesten eines astrophysikalischen Modells. Auf einem Bild können Fehler, die durch eine falsche Geometriebeschreibung verursacht werden, sehr leicht erkannt werden.

- Die Berechnung von Lichtkurven. Von sogenannten *Röntgenpulsaren* können wir periodische Röntgenpulse empfangen. Diese werden durch anisotrope Abstrahlung, verbunden mit der Eigenrotation des Sterns, verursacht. Die Form dieser Pulsprofile wird von der gravitativen Lichtablenkung sehr stark beeinflußt.

Auf diese Punkte will ich in Kapitel 6 etwas näher eingehen.

1.4 Gliederung

Kapitel 2 ist eine Kurzeinführung in die allgemeine Relativitätstheorie. Es faßt im Grunde nur Lehrbuchwissen zusammen und kann vom versierten oder mathematisch nicht interessierten Leser überschlagen werden.

In dieser Arbeit möchte ich als Beispiel für eine gekrümmte Raumzeit näher auf die *Schwarzschild-Metrik* eingehen. Sie beschreibt die Raumzeitgeometrie um eine kugelsymmetrische Massenverteilung, ein im Weltall recht häufig auftretender Fall. Ihre Eigenschaften sind im Kapitel 3 genauer beschrieben.

Im Kapitel 4 möchte ich mich zusammen mit dem Leser ins Innere eines Schwarzen Loches begeben. Außerdem ist dort die etwas längliche Rechnung aufgeführt, wie man in Kruskal-Szekeres-Koordinaten von der Metrik zu den Christoffel-Symbolen kommt.

Das Kapitel 5 ist das zentrale Kapitel dieser Arbeit. Es beschreibt, wie ein Bild entsteht, warum das in der „normalen“ Computergrafik übliche Ray-Tracing-Verfahren bei relativistischen Problemen versagt und was zu tun ist, um dennoch zu einem korrekten Bild zu kommen.

Diese Methoden können jetzt auf verschiedene astrophysikalisch interessante Szenarios angewendet werden. Einen Teil der bearbeiteten Projekte möchte ich in Kapitel 6 vorstellen.

Das Kapitel 7 geht auf die praktischen Aspekte ein. Bei einer solchen Arbeit liegt der größte Aufwand natürlich nicht in der Entwicklung einer im Grunde recht einfachen Theorie, sondern in der Bewältigung vieler kleiner Probleme eher organisatorischer und programmtechnischer Art, wie z. B. der Objektverwaltung im Rechner, Rechenzeitoptimierung oder der Aufnahme eines Films.

Kapitel 8 faßt die Grundideen der Arbeit kurz zusammen. Die interessantesten Ergebnisse — Ausschnitte aus den berechneten Filmsequenzen — sind im Bildanhang A zu finden.

2 Mathematische Grundlagen der ART

Dieses Kapitel erhebt *nicht* den Anspruch auf mathematische Strenge oder Vollständigkeit. Es soll nur die wichtigsten Begriffe einführen und kurz erläutern. Kenntnisse der speziellen und Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie möchte ich voraussetzen. Der weitergehend interessierte Leser sei auf [MTW73] und [THI77] verwiesen.

2.1 Notation

Ich verwende eine an [MTW73] angelehnte Schreibweise:

Allgemeine Mengen:	$\mathbf{M}$, $\mathbf{V}$
Menge der reellen Zahlen:	$\mathbf{R}$
Punkte auf einer Mannigfaltigkeit:	$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$
3-Vektor:	$\vec{x}$
3-Vektorkomponenten:	x^i $(i,j,k = 1,2,3)$
4-Vektor, 4-er 1-Form:	$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}$
4-Vektor-, 1-Formkomponenten:	x^α, ω_α $(\alpha,\, \beta,\, \gamma = 0,1,2,3)$
Tensoren:	$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{G}$
Tensorkomponenten:	$T^\alpha{}_\beta$
Skalar- oder inneres Produkt:	$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$
Kovariante Ableitung von $\boldsymbol{v}$:	$\boldsymbol{\nabla v}$
Kovariante Ableitung von $\boldsymbol{v}$ in Richtung $\boldsymbol{u}$:	$\boldsymbol{\nabla_u v}$
Äußere Ableitung eines Skalarfeldes f:	$\boldsymbol{d}f$
Äußere Ableitung eines Vektorfeldes $\boldsymbol{u}$:	$\boldsymbol{du}$

Für die Indizes von Vektorkomponenten in einer Koordinatenbasis verwende ich häufig auch die Bezeichnungen der entsprechenden Koordinaten, z. B. x^t, x^r, x^θ, x^ϕ statt x^0, x^1, x^2, x^3.

Soweit nicht anders erwähnt, werden geometrische Einheiten verwendet. D. h. die Lichtgeschwindigkeit c und die Gravitationskonstante G werden auf 1 gesetzt. Die Signatur der Raumzeit sei $(-,+,+,+)$.

2.2 Raumzeit

Die Raumzeit wird als vierdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit $\mathbf{M}$ behandelt. Sie kann durch eine Menge verträglicher *Karten*, einen *Atlas*, überdeckt werden. Eine Karte $(\mathbf{V}, \Phi)$ ist ein Homöomorphismus Φ einer offenen Menge $\mathbf{V}$ aus $\mathbf{M}$ auf eine offene Menge des $\mathbf{R}^m$, wobei m die Dimension der Mannigfaltigkeit ist. In unserem Fall ist $m = 4$.

2.3 Koordinatensysteme

In der Physik wird für *Karte* auch der Ausdruck *lokales Koordinatensystem* verwendet. Ein Koordinatensystem ist also eine Abbildung, die jedem Punkt $\mathcal{P}$ der Raumzeit ein Quadrupel $x^\alpha(\mathcal{P})$ zuordnet. Es wird nicht gefordert, daß ein Koordinatensystem die ganze Mannigfaltigkeit abdeckt (es ist zum Beispiel nicht möglich, eine Kugeloberfläche mit nur einer Karte singularitätsfrei abzudecken). Man muß nur verlangen, daß der Übergang von einer Karte zu einer anderen eine stetig differenzierbare Bijektion ist.

2.4 Tangentialraum

An jeden Punkt $\mathcal{P}_0$ der Raumzeit $\mathbf{M}$ kann ein sogenannter *Tangentialraum*, ein vierdimensionaler Vektorraum $\mathbf{V}$ „angeheftet" werden.

In ihm sind die Tangentialvektoren zu einer Kurve $\mathcal{P}(\lambda)$ durch $\mathcal{P}_0$ definiert:

$$\boldsymbol{u} := \partial_{\boldsymbol{u}} = (d/d\lambda)_{\text{längs der Kurve } \mathcal{P}(\lambda)}.$$

Nach Einführung einer Basis $\boldsymbol{e}_\alpha$ kann jeder Vektor in Komponenten zu dieser Basis zerlegt werden:

$$\boldsymbol{u} = u^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha.$$

2.5 Dualraum

Der *Dualraum* $\mathbf{V}^*$ zu einem Vektorraum $\mathbf{V}$ ist die Menge der linearen Abbildungen

$$\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{V} \mapsto \mathbf{R}.$$

$\boldsymbol{\varphi}$ heißt auch *1-Form*. Sie kann ebenfalls in einer Basis $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}^\alpha \varphi_\alpha.$$

2.6 Koordinatenbasis

Eine oft verwendete Basis für $\mathbf{V}$ besteht aus den Tangentialvektoren $\boldsymbol{e}_\alpha$ an die Koordinatenlinien:

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Die dazu duale Basis $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ des $\mathbf{V}^*$ ist:

$$\boldsymbol{\omega}_\alpha = \boldsymbol{d}x^\alpha.$$

Sie ist mit $\boldsymbol{e}_\alpha$ durch

$$\boldsymbol{\omega}^\alpha(\boldsymbol{e}_\beta) = \delta^\alpha{}_\beta$$

verknüpft.

2.7 Tensoren

Tensoren sind multilineare Abbildungen:

$$\boldsymbol{T}: \quad \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \times \ldots \times \mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \ldots \times \mathbf{V} \mapsto \mathbf{R}.$$

Sie können ebenfalls in einer Basis dargestellt werden:

$$\boldsymbol{T} = T^{\alpha}{}_{\beta}\, \boldsymbol{e}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta}.$$

2.8 Metrik

Um in der Raumzeit Abstände und Winkel messen zu können, benötigen wir ein *inneres Produkt* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ von zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$. Dies ist durch den *metrischen Tensor* $\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{\omega}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\beta}$ definiert:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = g_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} v^{\beta}. \tag{1}$$

Das Linienelement ist definiert als:

$$\boldsymbol{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{d}x^{\alpha} \boldsymbol{d}x^{\beta}. \tag{2}$$

Zwei Beispiele: Für einen 2-dimensionalen euklidischen Raum mit kartesischen Koordinaten x und y ist

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{d}s^2 = \boldsymbol{d}x^2 + \boldsymbol{d}y^2,$$

in Polarkoordinaten r und ϕ:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{d}s^2 = \boldsymbol{d}r^2 + r^2 \boldsymbol{d}\phi^2.$$

In einer 4-dimensionalen flachen Raumzeit hat die Metrik in Minkowski-Koordinaten t, x, y, z folgende Form:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{d}s^2 = -\boldsymbol{d}t^2 + \boldsymbol{d}x^2 + \boldsymbol{d}y^2 + \boldsymbol{d}z^2. \tag{3}$$

Wir sehen, daß die Metrik nicht mehr definit ist; g_{tt} ist negativ.

Jede Metrik kann durch eine Koordinatentransformation in Diagonalform gebracht werden. Ist p die Anzahl der positiven, n die Anzahl der negativen Diagonalelemente von $\boldsymbol{g}$, so ist p der *Index* von $\boldsymbol{g}$ und $p - n$ die *Signatur* von $\boldsymbol{g}$. Die Signatur ist eine Invariante unter orthonormalen Koordinatentransformationen.

Unsere Raumzeit hat die Signatur 2. In einer orthogonalen Basis ist das Längenquadrat eines Basisvektors negativ, das Längenquadrat der anderen drei Basisvektoren positiv oder umgekehrt (Konvention).

Wir empfinden denjenigen Basisvektor der Raumzeit als Zeitrichtung, dessen Längenquadrat ein anderes Vorzeichen hat als das der anderen drei.

2.9 Tetraden

Für lokale Berechnungen ist es günstig, ein lokales Orthonormalsystem, eine sogenannte *Tetrade*, zu haben. Die von einem Koordinatensystem induzierte Tetrade ist bei einer diagonalen Metrik $g_{\alpha\beta}$ einfach:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\alpha &= |g_{\alpha\alpha}|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, & (4) \\ \boldsymbol{\omega}^\alpha &= |g_{\alpha\alpha}|^{1/2}\, \boldsymbol{d}x^\alpha. & (5) \end{aligned}$$

2.10 Paralleltransport und kovariante Ableitung

Will man die Ableitung eines Vektor- oder Tensorfeldes $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ bestimmen, so muß man die Differenz zweier Vektoren bilden, die an *verschiedenen* Punkten der Raumzeit sitzen. Zwei solche Vektoren können aber nicht unmittelbar miteinander verglichen werden, da sie Elemente verschiedener Tangentialräume sind.

Der eine Vektor muß zuerst längs einer Kurve $\mathcal{P}(\lambda)$ zum Ort des anderen Vektors *paralleltransportiert* werden. Die *kovariante Ableitung* des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}(\mathcal{P})$ in Richtung des Tangentialvektors $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ an die Kurve $\mathcal{P}(\lambda)$ ist dann:

$$(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v})_{\mathcal{P}(0)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\boldsymbol{v}[\mathcal{P}(\varepsilon)]_{\text{nach } \mathcal{P}(0) \text{ paralleltransportiert}} - \boldsymbol{v}[\mathcal{P}(0)]}{\varepsilon} \right\}.$$

Paralleltransport heißt einfach, daß ein Physiker in einem lokalen Lorentz-System die Komponenten des Vektors bei einer Verschiebung unverändert läßt.

Wie ein System von Basisvektoren bei einer infinitesimalen Verschiebung verändert wird, kann durch die sogenannten *Konnexionskoeffizienten* oder *Christoffel-Symbole* $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ beschrieben werden:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \boldsymbol{\nabla}_\gamma \boldsymbol{e}_\beta \rangle. \tag{6}$$

Die Christoffel-Symbole lassen sich lokal aus einer gegebenen Metrik berechnen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\beta\gamma} &= \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}), & (7) \\ \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} &= g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}. & (8) \end{aligned}$$

Die kovariante Ableitung in Komponenten ist dann:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{T} = (T^\alpha{}_{\beta;\gamma} u^\gamma)\, \boldsymbol{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta, \tag{9}$$

mit

$$T^\alpha{}_{\beta;\gamma} = T^\alpha{}_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} T^\mu{}_\beta - \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} T^\alpha{}_\mu. \tag{10}$$

Eine andere Schreibweise für die kovariante Ableitung in Komponenten ist

$$T^\alpha{}_{\beta;\gamma} u^\gamma = \frac{DT^\alpha{}_\beta}{d\lambda}.$$

2.11 Geodäten

Eine Geodäte ist eine Kurve $\mathcal{P}(\lambda)$, die ihren Tangentenvektor $\boldsymbol{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ längs sich selbst paralleltransportiert:

$$\boldsymbol{\nabla_u u} = 0. \tag{11}$$

In Komponenten, bezogen auf ein Koordinatensystem $x^\alpha(\mathcal{P})$ in dem $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ ist, gilt:

$$\frac{D(dx^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} = \frac{d(dx^\alpha/d\lambda)}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0,$$

oder kurz mit $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$:

$$\boxed{\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0.} \tag{12}$$

Dies sind die für diese Arbeit grundlegenden Gleichungen, da sich das für die Photographie erforderliche Licht längs solcher Geodäten ausbreitet (s. Abschnitt 2.14). Es sind vier gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich außer für den trivialen Fall $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$ im allgemeinen nicht analytisch lösen lassen.

2.12 Riemann-Tensor

Der Riemann-Tensor $\boldsymbol{R}$ beschreibt die relative Beschleunigung benachbarter Geodäten und damit auch die durch Gravitation verursachten *lokalen* Kräfte und Spannungen innerhalb eines ausgedehnten Körpers, die sogenannten *Gezeitenkräfte*.

Man betrachte eine Schar von Geodäten $\mathcal{P}(\lambda, n)$ (n ist der Scharparameter). Mit

$$\boldsymbol{u} = \partial\mathcal{P}/\partial\lambda \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{n} = \partial\mathcal{P}/\partial n$$

gilt für die Beschleunigung eines benachbarten Testteilchens $\boldsymbol{\nabla_u\nabla_u n}$:

$$\boldsymbol{\nabla_u\nabla_u n} + \boldsymbol{R}(\ldots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = 0,$$

in Komponenten:

$$\frac{D^2n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u^\beta n^\gamma u^\delta = 0.$$

Die Komponenten von $\boldsymbol{R}$ lassen sich aus den Christoffel-Symbolen berechnen:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}.$$

2.13 Einsteinsche Feldgleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen beschreiben den lokalen Zusammenhang zwischen Masse- und Energieverteilung und der sich daraus ergebenden Metrik der Raumzeit:

$$\boldsymbol{G} = 8\pi\boldsymbol{T}. \tag{13}$$

Dabei ist $\boldsymbol{T}$ der Energie-Impuls-Tensor.

$\boldsymbol{G}$ ist der *Einstein-Tensor*, dessen Komponenten $G_{\mu\nu}$ aus dem Riemann-Tensor $\boldsymbol{R}$ berechnet werden können:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R, \tag{14}$$

wobei

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \qquad \text{und} \qquad R = R^{\mu}{}_{\mu}.$$

Für eine gegebene Materie- und Energieverteilung $\boldsymbol{T}(\mathcal{P})$ erhalten wir dann über $\boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{R} \rightarrow \Gamma \rightarrow \boldsymbol{g}$ die Metrik $\boldsymbol{g}$.

2.14 Lichtausbreitung

Licht breitet sich im Vakuum auf sogenannten *Nullgeodäten* aus, d. h. der Tangentenvektor $\boldsymbol{u}$ an die Geodäte ist ein Nullvektor ($\boldsymbol{u}^2 = 0$). Der Verlauf der Photonenbahn wird durch die Geodätengleichung (Gleichung (12)) bestimmt.

2.14.1 Gravitative Rotverschiebung und Dopplereffekt

Die Energie eines Photons mit dem 4-Energie-Impuls-Vektor $\boldsymbol{p}$ steckt in der p^0-Komponente. Sie verändert sich, folgt man der Geodätengleichung, gemäß dem Gravitationspotential.

Die Energie des Photons, gemessen im Bezugssystem eines sich mit der 4-Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ fortbewegenden Beobachters, ist:

$$E_{\text{Photon}} = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u} \rangle. \tag{15}$$

Die Frequenz des Lichts ist $\omega = E_{\text{Photon}}/\hbar$.

Zwei Beobachter mit den 4-Geschwindigkeiten u_1, u_2, die ein vorbeifliegendes Photon betrachten, messen ein Frequenzverhältnis

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_2 \rangle}.$$

3 Die Schwarzschild-Metrik

Die Schwarzschild-Metrik beschreibt die Raumzeit-Geometrie um eine kugelsymmetrische nichtrotierende Massenverteilung und wurde als erste exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen von Karl Schwarzschild kurz nach der Veröffentlichung von Einsteins Arbeit zur allgemeinen Relativitätstheorie angegeben.

3.1 Metrik

Die Metrik im Außenraum des Zentralkörpers ist ausschließlich durch dessen Gesamtmasse M bestimmt. Das Linienelement dieser Metrik kann beispielsweise so geschrieben werden:

$$\boldsymbol{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\boldsymbol{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\boldsymbol{d}r^2 + r^2(\boldsymbol{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\boldsymbol{d}\phi^2). \tag{16}$$

Hier wurde ein Koordinatensystem und eine Koordinatenbenennung gewählt, die eine Ähnlichkeit zu den in einer flachen Raumzeit bei kugelsymmetrischen Problemen üblicherweise verwendeten Kugelkoordinaten suggerieren. Die t-Koordinate entspricht der Eigenzeit eines im Unendlichen sitzenden Beobachters. Die r-Koordinate ist durch den Umfang $2\pi r$ eines Kreises bzw. die Oberfläche $4\pi r^2$ einer Kugelschale um den Koordinatenursprung bestimmt. Die Metrik ist unabhängig von t.

Störend erscheint zunächst, daß die Koeffizienten g_{tt} und g_{rr} bei $r = 2M$ singulär werden. Wie sich im nächsten Kapitel herausstellen wird, ist das aber nur ein Problem dieses Koordinatensystems und kann durch eine andere Koordinatenwahl behoben werden.

Die Wahl des Koordinatensystems und die Benennung der Koordinaten ist reine Konvention! Auch ob eine Koordinate eine Zeit- oder Raumkoordinate ist, entscheidet nicht die Benennung mit dem Buchstaben t oder r, sondern allein die Zeit- oder Raumartigkeit des entsprechenden Basisvektors.

Die Wichtigkeit dieses Satzes wird sofort einsichtig, wenn man zu r-Werten kleiner $2M$ übergeht. Jetzt ist auf einmal $g_{rr} < 0$ und $g_{tt} > 0$, $\boldsymbol{e}_r$ damit ein zeitartiger und $\boldsymbol{e}_t$ ein raumartiger Vektor. $\boldsymbol{e}_r$ zeigt in die Vergangenheit, der Lauf der Zeit wird also durch eine abnehmende r-Koordinate charakterisiert, $\boldsymbol{e}_t$ wird von einem Beobachter als dritte Raumkoordinate empfunden. Da die Metrik von r abhängt, heißt das, daß die Metrik für $r < 2M$ zeitabhängig und mit fortschreitender Zeit, d. h. für $r \to 0$, singulär wird.

Bleiben wir zunächst außerhalb dieser gefährlichen Zone. Für $r > 2M$ ist t die Zeitkoordinate, die Metrik ist zeitunabhängig. Sie könnte z. B. mit einem statischen Gerüst von Meterstäben vermessen werden.

3.2 Christoffel-Symbole

Die Christoffel-Symbole $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ lassen sich nach Gleichung (7) berechnen:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{t}{}_{tr} = \Gamma^{t}{}_{rt} &= \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}, && (17)\\
\Gamma^{r}{}_{tt} &= \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right), && (18)\\
\Gamma^{r}{}_{rr} &= -\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}, && (19)\\
\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} &= -(r-2M), && (20)\\
\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} &= -\sin^2\theta\,(r-2M), && (21)\\
\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{\theta r} &= \frac{1}{r}, && (22)\\
\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\,\cos\theta, && (23)\\
\Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi r} &= \frac{1}{r}, && (24)\\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} &= \cot\theta. && (25)
\end{aligned}$$

3.3 Lichtausbreitung

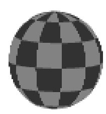
Licht breitet sich gemäß der Geodätengleichung aus (s. Abschnitt 2.14):

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\,\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = 0.$$

Nach Einsetzen der oben angegebenen Christoffel-Symbole erhalten wir für die Photonenbahnen folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\ddot{t} &= -\frac{2M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r^2}\right)^{-1}\dot{r}\dot{t}, && (26)\\
\ddot{r} &= -\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2\\
&\quad + (r-2M)\,(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2), && (27)\\
\ddot{\theta} &= -\frac{2}{r}\,\dot{\theta}\dot{r} + \sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}^2, && (28)\\
\ddot{\phi} &= -\frac{2}{r}\,\dot{\phi}\dot{r} - 2\cot\theta\,\dot{\phi}\dot{\theta}. && (29)
\end{aligned}$$

In Abb. 1 sind einige Photonenbahnen dargestellt. Die Lichtquelle ist $6M$ von dem in der Bildmitte befindlichen Zentralkörper entfernt. Wir erkennen, daß es zwei Klassen von Bahnen gibt, solche, die sich dem Stern bis zu einem Umkehrpunkt nähern, um dann wieder im Unendlichen zu verschwinden und solche, die im Koordinatenursprung enden. Die Grenzlinie liegt bei $r = 3M$. Dort sind für Photonen (instabile) Kreisbahnen möglich.



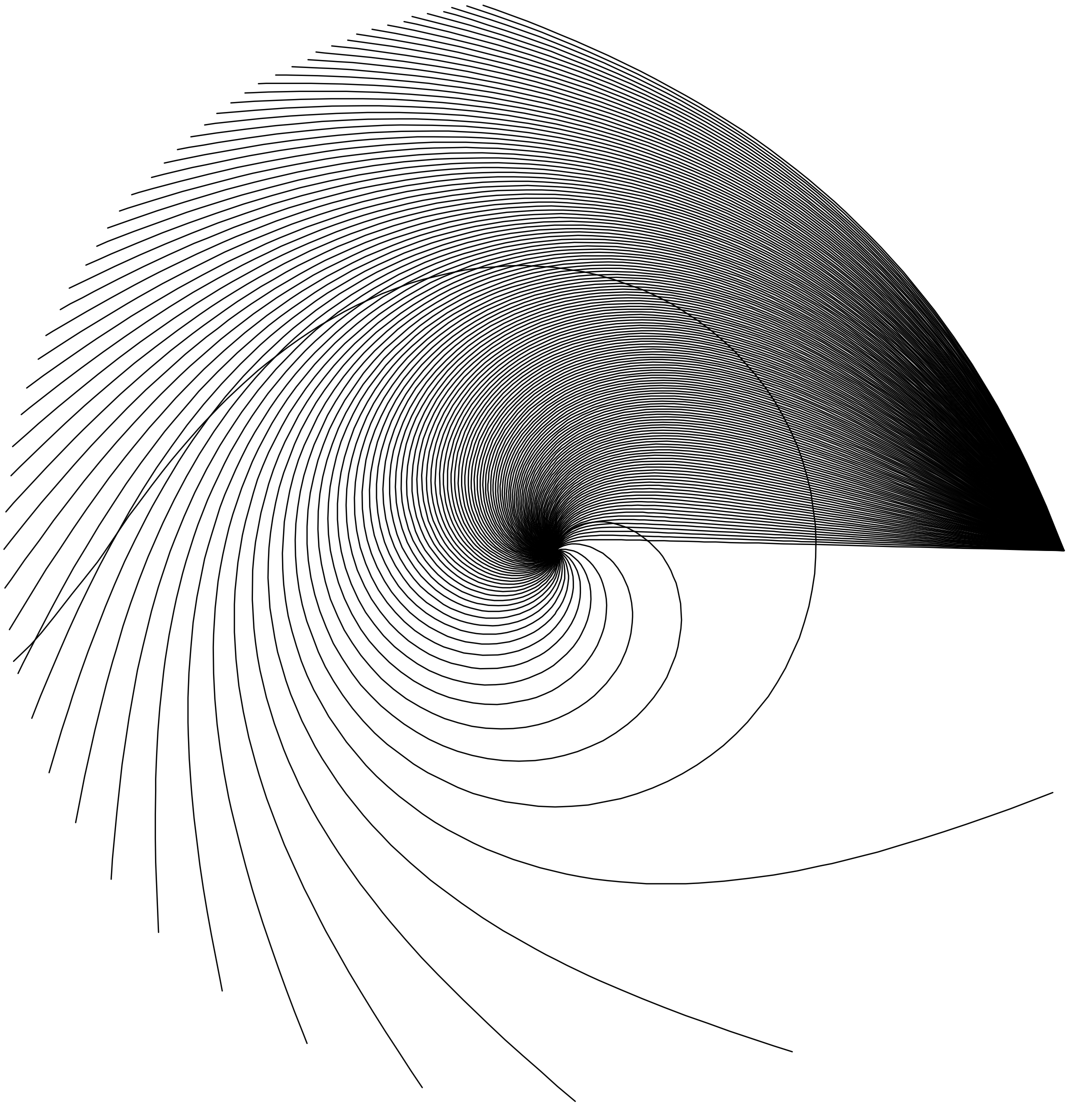


Abb. 1: Photonenbahnen in der Schwarzschild-Metrik

4 Schwarze Löcher

Ein Schwarzes Loch ist das Endstadium eines unter seinen Schwarzschildradius $r = 2M$ kollabierenden Sterns.

Daß die Singularität der Schwarzschild-Metrik in Schwarzschild-Koordinaten bei $r = 2M$ keine Singularität der Raumzeit ist, wird ersichtlich, wenn wir den für Gezeitenkräfte allein zuständigen Riemann-Tensor $\boldsymbol{R}$ betrachten. Seine Komponenten sind $\sim M/r^3$, sie sind also bei $r = 2M$ regulär. Springen wir als wagemutige Astrophysiker in ein Schwarzes Loch hinein, so bemerken wir beim Durchgang durch $r = 2M$ *keine* Änderung unserer lokalen Umgebung. Erst bei $r = 0$ stoßen wir auf eine wirkliche Singularität der Raumzeit (wenn wir von — heute noch nicht verstandenen — Quanteneffekten absehen). Dort werden die Gezeitenkräfte unendlich, jede denkbare Struktur löst sich auf.

4.1 Kruskal-Szekeres-Koordinaten

Da die bisher verwendeten Schwarzschild-Koordinaten bei $r = 2M$ singulär werden, müssen wir zum Studium eines Schwarzen Loches auf ein anderes Koordinatensystem übergehen. Geeignet sind z. B. die *Kruskal-Szekeres-Koordinaten* v, u, θ und ϕ. Deren Komponenten u und v hängen in dem uns zugänglichen Teil der Welt ($v > -u$) wie folgt mit den Schwarzschild-Koordinaten r und t zusammen:

$$\left.\begin{aligned} u &= (r/2M-1)^{1/2}\, e^{r/4M} \cosh(t/4M) \\ v &= (r/2M-1)^{1/2}\, e^{r/4M} \sinh(t/4M) \end{aligned}\right\} \text{für } r > 2M, \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= (1-r/2M)^{1/2}\, e^{r/4M} \sinh(t/4M) \\ v &= (1-r/2M)^{1/2}\, e^{r/4M} \cosh(t/4M) \end{aligned}\right\} \text{für } r < 2M. \tag{31}$$

Für $v < -u$ gelten die gleichen Formeln, nur mit umgekehrten Vorzeichen. Die Transformation ist in Abb. 2 dargestellt.

Die inverse Transformation ist:

$$(r/2M-1)\, e^{r/2M} = u^2 - v^2, \tag{32}$$

$$t = \begin{cases} 4M \tanh^{-1}(v/u) & \text{für } r > 2M \\ 4M \tanh^{-1}(u/v) & \text{für } r < 2M \end{cases}. \tag{33}$$

Die Gleichung für r ist leider nur implizit gegeben, die Ableitungen $\partial r/\partial v$ und $\partial r/\partial u$ können aber explizit berechnet werden:

$$\frac{\partial r}{\partial v} = -\frac{8M^2 e^{-r/2M}}{r} v, \qquad \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{8M^2 e^{-r/2M}}{r} u. \tag{34}$$

Die Winkelkoordinaten θ und ϕ sind gleich den entsprechenden Schwarzschild-Koordinaten.

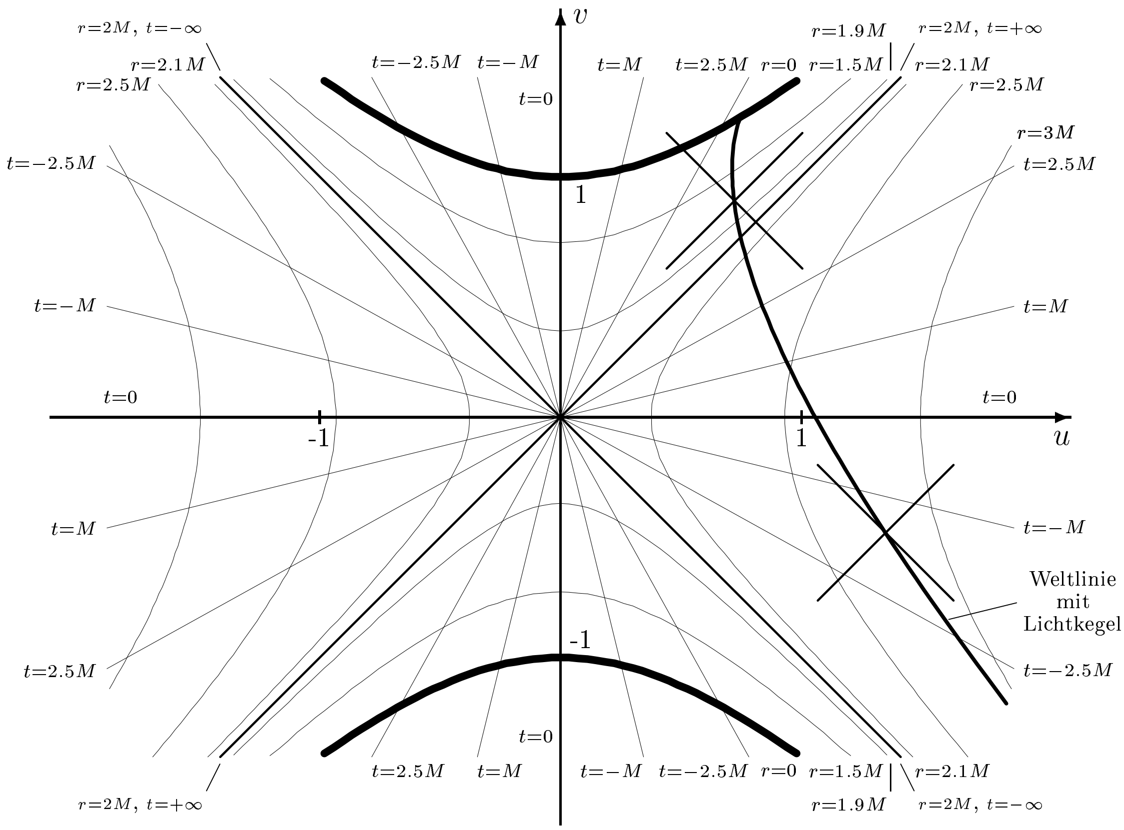


Abb. 2: Kruskal-Szekeres-Koordinaten. Die eingezeichnete Weltlinie ist die eines ab $t = -5, r = 3$ frei fallenden Körpers.

4.2 Das Linienelement in Kruskal-Szekeres-Koordinaten

Das Linienelement hat folgende Form:

$$\boldsymbol{d}s^2 = (32M^3/r)\, e^{-r/2M}\, (-\boldsymbol{d}v^2 + \boldsymbol{d}u^2) + r^2(\boldsymbol{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \boldsymbol{d}\phi^2), \tag{35}$$

wobei r implizit durch Gleichung (32) gegeben ist.

Die Singularität bei $r = 2M$ ist verschwunden. Auf der gesamten Mannigfaltigkeit ist $\boldsymbol{e}_v$ zeitartig und $\boldsymbol{e}_u$ raumartig. Damit sind v die Zeit- und u, θ und ϕ die drei Raumkoordinaten. Da $g_{vv} = -g_{uu}$ gilt, ist die Kausalstruktur gleich wie im Minkowski-Fall. Im u-v-Diagramm (Abb. 2) wird der Lichtkegel durch 45°-Geraden aufgespannt. Weltlinien laufen von unten nach oben und bilden mit der v-Achse einen Winkel kleiner 45°.

4.3 Christoffel-Symbole

Da die Metrik kugelsymmetrisch ist, können wir uns bei der Rechnung auf eine Ebene durch den Koordinatenursprung, z. B. die Äquatorebene, beschränken. Mit

$$k_1 = (32M^3/r)\, e^{-r/2M}$$

ist die Metrik:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta = v, u, \phi.$$

Für die Berechnung der Christoffel-Symbole benötigen wir die Ableitungen $g_{\alpha\beta,\gamma}$: Mit

$$k_1' = \frac{64M^4(2M + r)e^{-r/M}}{r^3}, \qquad k_2' = 8M^2 e^{-r/2M}$$

ist

$$\frac{\partial k_1}{\partial v} = 2k_1' v, \qquad \frac{\partial k_1}{\partial u} = -2k_1' u$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{vv}}{\partial v} &= -\frac{\partial k_1}{\partial v} = -2k_1' v, \\
\frac{\partial g_{vv}}{\partial u} &= -\frac{\partial k_1}{\partial u} = +2k_1' u, \\
\frac{\partial g_{uu}}{\partial v} &= +\frac{\partial k_1}{\partial v} = +2k_1' v, \\
\frac{\partial g_{uu}}{\partial u} &= +\frac{\partial k_1}{\partial u} = -2k_1' u, \\
\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial v} &= 2r\frac{\partial r}{\partial v} = -2k_2' v, \\
\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial u} &= 2r\frac{\partial r}{\partial u} = 2k_2' u.
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (7) können jetzt die Christoffel-Symbole berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{vvv} &= +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{vv}}{\partial v} = -k_1' v, \\
\Gamma_{vvu} = \Gamma_{vuv} &= +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{vv}}{\partial u} = +k_1' u, \\
\Gamma_{vuu} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{uu}}{\partial v} = -k_1' v, \\
\Gamma_{uuu} &= +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{uu}}{\partial u} = -k_1' u, \\
\Gamma_{uuv} = \Gamma_{uvu} &= +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{uu}}{\partial v} = +k_1' v, \\
\Gamma_{uvv} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{vv}}{\partial u} = -k_1' u, \\
\Gamma_{v\phi\phi} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial v} = +k_2' v, \\
\Gamma_{u\phi\phi} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial u} = -k_2' u, \\
\Gamma_{\phi\phi v} = \Gamma_{\phi v\phi} &= +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial v} = -k_2' v, \\
\Gamma_{\phi\phi u} = \Gamma_{\phi u\phi} &= +\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial u} = +k_2' u.
\end{aligned}
$$

Da die Metrik diagonal ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{v}{}_{\alpha\beta} &= g^{vv}\Gamma_{v\alpha\beta} = {g_{vv}}^{-1}\Gamma_{v\alpha\beta} = -\frac{1}{k_1}\Gamma_{v\alpha\beta}, \\
\Gamma^{u}{}_{\alpha\beta} &= g^{uu}\Gamma_{u\alpha\beta} = {g_{uu}}^{-1}\Gamma_{u\alpha\beta} = \frac{1}{k_1}\Gamma_{u\alpha\beta}, \\
\Gamma^{\phi}{}_{\alpha\beta} &= g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\alpha\beta} = {g_{\phi\phi}}^{-1}\Gamma_{\phi\alpha\beta} = \frac{1}{r^2}\Gamma_{\phi\alpha\beta},
\end{aligned}
$$

und mit:

$$c_1 := \frac{k_1'}{k_1} = \frac{2M(2M+r)e^{-r/2M}}{r^2}, \tag{36}$$

$$c_1' := \frac{k_2'}{k_1} = \frac{r}{4M}, \tag{37}$$

$$c_2 := \frac{k_2'}{r^2} = \frac{8M^2 e^{-r/2M}}{r^2} \tag{38}$$

ergeben sich die von 0 verschiedenen $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ zu:

$$\Gamma^{v}{}_{vv} = +c_1 v, \tag{39}$$

$$\Gamma^{v}{}_{vu} = \Gamma^{v}{}_{uv} = -c_1 u, \tag{40}$$

$$\Gamma^{v}{}_{uu} = +c_1 v, \tag{41}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{u}{}_{uu} &= -c_1 u, && (42)\\
\Gamma^{u}{}_{vu} = \Gamma^{u}{}_{uv} &= +c_1 v, && (43)\\
\Gamma^{u}{}_{vv} &= -c_1 u, && (44)\\
\Gamma^{v}{}_{\phi\phi} &= -c_1' v, && (45)\\
\Gamma^{u}{}_{\phi\phi} &= -c_1' u, && (46)\\
\Gamma^{\phi}{}_{v\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi v} &= -c_2 v, && (47)\\
\Gamma^{\phi}{}_{u\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi u} &= +c_2 u. && (48)
\end{aligned}
$$

4.4 Geodäten

Wie in den Schwarzschild-Koordinaten kann jetzt eine Geodätengleichung aufgestellt werden:

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\,\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = 0.$$

Für die einzelnen Komponenten erhalten wir dann mit den $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ aus Gleichung (39)ff folgende Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\ddot{v} &= +c_1\left[2u\dot{v}\dot{u} - v(\dot{v}^2 + \dot{u}^2)\right] + c_1' v\dot{\phi}^2, && (49)\\
\ddot{u} &= -c_1\left[2v\dot{v}\dot{u} - u(\dot{v}^2 + \dot{u}^2)\right] + c_1' u\dot{\phi}^2, && (50)\\
\ddot{\phi} &= 2c_2\dot{\phi}(v\dot{v} - u\dot{u}). && (51)
\end{aligned}
$$

4.5 Tetraden

Die von den Kruskal-Szekeres-Koordinaten induzierte Tetrade ist:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_v &= k_1{}^{-1/2}\partial_v,\\
\boldsymbol{e}_u &= k_1{}^{-1/2}\partial_u,\\
\boldsymbol{e}_\theta &= \frac{1}{r}\partial_\theta,\\
\boldsymbol{e}_\phi &= \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi.
\end{aligned}
$$

Die dazu duale Basis ist:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^v &= k_1{}^{1/2}\boldsymbol{d}v,\\
\boldsymbol{\omega}^u &= k_1{}^{1/2}\boldsymbol{d}u,\\
\boldsymbol{\omega}^\theta &= r\,\boldsymbol{d}\theta,\\
\boldsymbol{\omega}^\phi &= r\sin\theta\,\boldsymbol{d}\phi.
\end{aligned}
$$

4.6 Gravitationskollaps

Da innerhalb des Ereignishorizontes keine statischen Objekte bzw. Beobachter mehr möglich sind (auf jeder möglichen, d. h. zeitartigen Weltlinie nimmt die r-

Koordinate in endlicher Eigenzeit auf 0 ab), muß zur Beobachtung ein bewegtes (kollabierendes) Objekt gewählt werden.

Der Kollaps eines Sterns mit einigen Sonnenmassen ist sehr kompliziert, da die Sterndichte schon vor dem Erreichen des Schwarzschildradius ein Vielfaches der Dichte von Atomkernen erreicht und die Materiezustandsgleichungen in diesem Bereich noch nicht sehr gut verstanden werden.

Dieses Problem kann man umgehen, wenn man eine Gaswolke von der Masse unserer Galaxis kollabieren läßt. Dann liegt die Dichte beim Erreichen des Schwarzschildradius bei der Dichte von Luft ($\approx 10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$) und der Innendruck kann vernachlässigt werden.

Der einfachste Fall ist also eine kugelsymmetrische kollabierende Staubwolke mit homogener Dichte und verschwindendem Druck. Da die Teilchen der Sternoberfläche durch keine Kraft gebremst werden, fallen sie frei längs einer radialen Geodäten nach innen.

Die Dauer (Eigenzeit an der Sternoberfläche) des freien Kollapses ist interessanterweise nur von der Anfangsdichte ρ_0 abhängig ([SEX87] S. 262ff):

$$\tau = 2.1 \cdot 10^3\,\mathrm{s} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\mathrm{g/cm^3}}\right)^{-1/2}$$

Für einen Stern von etwa der Dichte der Sonne ergibt sich eine Kollapszeit von ca. einer Stunde; ein typischer Neutronenstern mit einer Dichte von $10^{15}\,\mathrm{g/cm^3}$ würde nach Ausschalten der inneren Kräfte in ca. $100\,\mu\mathrm{s}$ kollabieren, die oben genannte Staubwolke mit der Dichte von Luft in etwa einem Tag.

5 4D-Ray-Tracing

Um von einer gegebenen dreidimensionalen Szene ein zweidimensionales photorealistisches, d. h. einer photographischen Aufnahme gleichendes Bild zu erhalten, wird in der Computergrafik gern das sogenannte *Ray-Tracing-Verfahren* angewandt.

5.1 Das Prinzip

Ray-Tracing ist eine Abbildung der Filmfläche auf die darzustellenden Objekte. D. h. zu jedem Punkt der Filmfläche wird die Herkunft eines dort auftreffenden Lichtstrahls gesucht.

Dazu wird die Filmfläche in einzelne Pixel aufgeteilt. Zu jedem Pixel bestimmt man dann den Richtungsvektor des Lichtstrahls, der durch das Objektiv auf diesen Punkt trifft. Dieser Richtungsvektor wird nun von der Kameraposition aus rückwärts verfolgt, bis entweder ein Objekt getroffen wird, oder man wieder so weit von der darzustellenden Szene entfernt ist, daß kein Treffer mehr möglich ist. Bei einem Treffer erhält das Pixel, von dem man gestartet ist, die Farbe des Objekts am Auftreffpunkt.

In „normalen“ Computergrafikanwendungen kann die Lichtlaufzeit im Vergleich zu den Bewegungen der Objekte bzw. der Kamera vernachlässigt werden. Es genügt daher im dreidimensionalen Raum die Schnittpunkte der Lichtstrahlen mit statischen Objekten zu suchen.

Hier dagegen, wo Objekt- und Kamerageschwindigkeiten in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit rücken, spielen die Relativitätstheorie sowie Lichtlaufzeiteffekte eine große Rolle (die „Dauer“ — Eigenzeit an der Sternoberfläche — eines Gravitationskollapses liegt in der gleichen Größenordnung wie die Lichtlaufzeit durch das System).

Die Lösung ist einfach: Wir nehmen die Zeitdimension hinzu und betreiben das Ray-Tracing in einer jetzt statischen vierdimensionalen Raumzeit. Mit „statisch“ ist gemeint, daß die vierdimensionale Beschreibung der Szene als Ansammlung von Weltröhren im Gegensatz zur dreidimensionalen Darstellung *nicht* mehr die Funktion eines *äußeren* Parameters (der Zeit) ist. Gesucht sind also die Schnittpunkte der in die Vergangenheit extrapolierten Weltlinien der Photonen mit den Weltlinien der darzustellenden Objekte. Für eine zweidimensionale Raumzeit ist dies in Abb. 3 dargestellt. Das Ereignis A auf der Weltlinie der Kamera ist der Empfang eines Photons, dessen Emission beim beobachteten Objekt das Ereignis A' darstellt.

In einem flachen Raum bzw. einer flachen Raumzeit ist es möglich, diese Schnittpunkte mit Methoden der linearen Algebra bzw. der projektiven Geometrie direkt zu berechnen. In einer gekrümmten Raumzeit dagegen müssen wir die Photonenbahnen durch Integration der Geodätengleichung bestimmen.

In den nächsten Abschnitten möchte ich die Einzelheiten des von mir entwickelten Verfahrens etwas genauer darstellen.

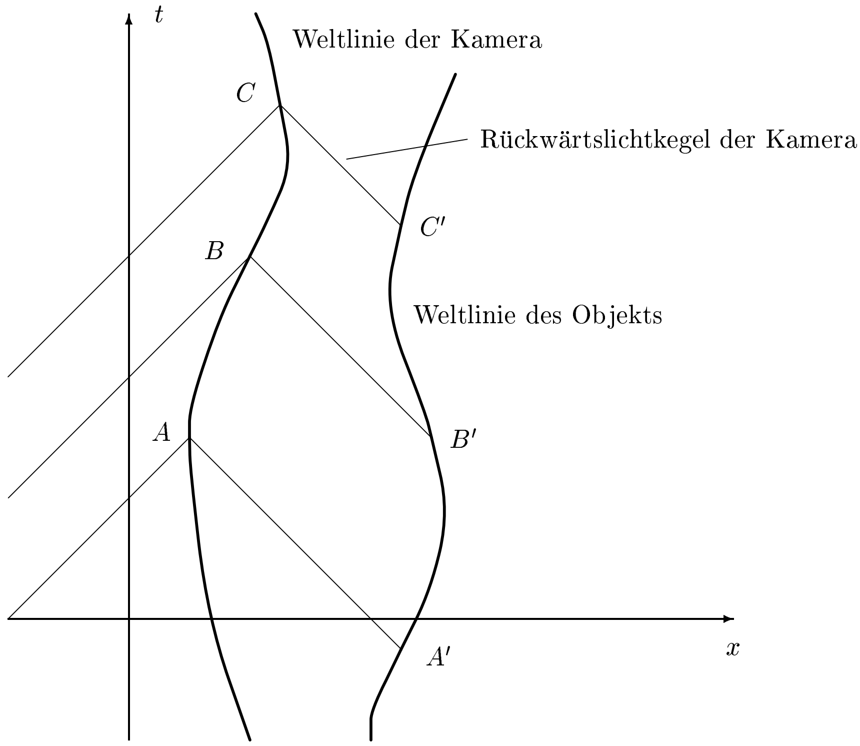


Abb. 3: Ray-Tracing in einer zweidimensionalen Raumzeit

5.2 Die Kamera

Als Kamera verwenden wir eine Lochkamera. Vor dem Film ist im Abstand der Brennweite b ein Loch angeordnet (s. Abb. 4).

Um die Lichtstrahlen in der Kamera beschreiben zu können, führen wir ein lokales kartesisches (Lorentz-) Koordinatensystem ein. Der Film (Größe in dimensionslosen Einheiten: 1·1) liegt in der x-y-Ebene ($-0.5 \leq x \leq +0.5$, $-0.5 \leq y \leq +0.5$), das Objektiv (Loch) im Punkt $(0, 0, b)$, wobei b die Kamerabrennweite ist. Das Pixel auf der Filmebene mit den Koordinaten (x, y) wird von einem Lichtstrahl mit dem Richtungsvektor $\vec{k} = (x, y, -b)$ getroffen.

Wir normieren den so berechneten Richtungsvektor $\vec{k}$ auf 1 und ergänzen ihn um die k^0-Komponente 1 zu einem 4-Vektor $\boldsymbol{k}$.

Dieser Vektor $\boldsymbol{k}$ ist dann der 4-Wellenvektor eines Photons ($\boldsymbol{k}^2 = 0$) mit der Frequenz $\omega = k^{0'} = 1$ und dem räumlichen Richtungsvektor, der durch das Objektiv in Richtung auf das gewünschte Pixel zeigt. Er kann somit als Tangentenvektor

$$\boldsymbol{k} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda}$$

an die zu dem zu berechnenden Bildpixel führende Photonenbahn $\mathcal{P}(\lambda)$ dienen.

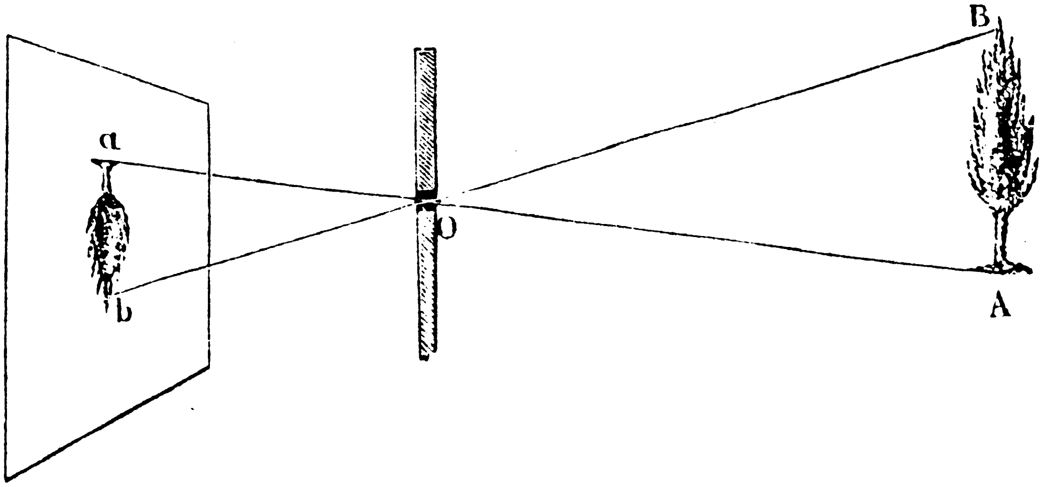


Abb. 4: Das Prinzip einer Lochkamera

Seine Komponenten im Kamerakoordinatensystem seien $k^{\alpha'}$. Der dazugehörende Energie-Impuls-Vektor ist $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$.

Als Brennweite b wurde in den meisten Filmen der Wert 2 verwendet (das entspricht bei einer Kleinbildkamera etwa einem Normalobjektiv). Für die Lichtkurvenberechnungen werden ein großer Abstand und eine große Brennweite verwendet, um perspektivische Verzerrungen zu vermeiden.

5.3 Der Beobachter

Als nächstes müssen wir festlegen, wann und von wo aus die Aufnahme gemacht werden soll. Wir geben in einem geeigneten globalen Koordinatensystem die Kameraposition ${x_k}^\alpha$ und -geschwindigkeit $\vec{v}_k$, sowie die Kameraausrichtung $\vec{a}_k$ vor.

Die Lorentztransformation $\boldsymbol{\Lambda}$, die die Komponenten $k^{\alpha'}$ vom Kamerakoordinatensystem in das globale Koordinatensystem transformiert, setzt sich aus einer Rotation $\boldsymbol{R}$, die die z-Achse des Kamerakoordinatensystems in Richtung von $\vec{a}_k$ dreht, und einer Geschwindigkeitstransformation $\boldsymbol{L}$ mit der Kamerageschwindigkeit $\vec{v}$ zusammen ($\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$). Damit lassen sich dann die Komponenten von $\boldsymbol{k}$ im globalen Koordinatensystem berechnen:

$$k^\alpha = {\Lambda^\alpha}_{\alpha'} k^{\alpha'}.$$

5.4 Die Photonenbahn

Um die Herkunft des Photons zu ermitteln, müssen wir die Geodätengleichung

$$\ddot{x}^\alpha + {\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0$$

mit den Anfangswerten

$$x_0{}^\alpha = x_k{}^\alpha \qquad \text{und} \qquad \dot{x}_0{}^\alpha = k^\alpha$$

zu negativen Bahnparametern hin integrieren, bis die Weltlinie $x^\alpha(\lambda)$ des Photons die Weltröhre eines Objekts schneidet.

Bei dieser Integration kann es durchaus passieren, daß wir unterwegs das Koordinatensystem wechseln müssen. Betrachten wir z. B. einen Beobachter, der von weitem einem Gravitationskollaps zuschaut. In größerer Entfernung vom Stern kann die Photonenbahn in Schwarzschild-Koordinaten beschrieben werden. Kruskal-Szekeres-Koordinaten sind hier nicht geeignet, da, wie man aus den Transformationsgleichungen (s. Gleichung (30)) ersehen kann, die Zahlenwerte für u bzw. v aufgrund der exponentiellen Abhängigkeit von r und t leicht den Zahlenbereich eines jeden Rechners sprengen würden. In der Nähe von $r = 2M$ werden die Schwarzschild-Koordinaten unbrauchbar, da dort die $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ divergieren. Die Kruskal-Szekeres-Koordinaten dagegen verhalten sich ordentlich. Das bedeutet, daß wir irgendwo dazwischen (im einem Bereich, in dem sich *beide* Koordinatensysteme gesittet benehmen) von den beim Beobachter verwendeten Schwarzschild-Koordinaten auf die in der Nähe des Sterns notwendigen Kruskal-Szekeres-Koordinaten übergehen müssen.

5.5 Objekte

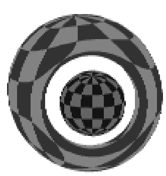
Die Weltröhren der abzubildenden Objekte sind durch *Abstandsfunktionen* $D(\mathcal{P})$ gegeben. $D(\mathcal{P})$ sei eine monotone Funktion des raumartigen Intervalls zwischen dem Ereignis $\mathcal{P}$ und einem (ungefähr „gleichzeitigen“) Ereignis $\mathcal{Q}$ auf der Weltröhre des Objekts, wobei $D(\mathcal{P}) < 0$, wenn $\mathcal{P}$ innerhalb, $D(\mathcal{P}) = 0$, wenn $\mathcal{P}$ auf der Oberfläche und $D(\mathcal{P}) > 0$, wenn $\mathcal{P}$ außerhalb des Objekts liegt.

Setzen wir für $\mathcal{P}$ die Bahn des Photons $\mathcal{P}(\lambda)$ ein, so sind die Bahnparameter der gesuchten Schnittpunkte der Photonenweltlinie mit der Objektweltröhre einfach die Nullstellen von $D(\mathcal{P}(\lambda))$.

Da ein Objekt O auch durchscheinend sein kann, müssen sowohl Eintrittspunkt $\mathcal{P}(\lambda_i)$ des Photons in das Objekt, als auch Austrittspunkt $\mathcal{P}(\lambda_o)$ aus dem Objekt berechnet werden. Ich möchte hier das Tupel $(O, \lambda_i, \lambda_o)$ als *Schnitt* bezeichnen.

Für eine gegebene Photonenbahn $\mathcal{P}(\lambda)$ berechnen wir sämtliche Schnitte mit allen abzubildenden Objekten und sortieren sie nach aufsteigenden λ-Werten. Jetzt suchen wir in dieser Liste von oben, d. h. von dem dem Beobachter am nächsten liegenden Schnitt, das erste undurchsichtige Objekt. Alle nachfolgenden (kleinere λ-Werte) Schnitte können, da sie nicht sichtbar sind, aus der Liste entfernt werden.

Diese Liste stellt die Schnittstelle zur Physik des Emissions- und Absorptionsverhaltens der beobachteten Körper dar. Sie wird jetzt einer Routine übergeben, die für jedes Listenelement den Beitrag zum Gesamtspektrum des bei der Kamera ankommenden Lichtstrahls berechnet.



Diese Routine ist an sich nicht Thema dieser Diplomarbeit, sie wird von dem zu visualisierenden astrophysikalischen Modell vorgegeben. Die zwei folgenden Abschnitte enthalten nur ein paar grundsätzliche Anmerkungen dazu.

5.6 Objektsystem

Ist die Photonen-Emission eines Objekts richtungsabhängig, muß der Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ noch ins Ruhesystem des Objekts transformiert werden. Der räumliche Anteil von $\boldsymbol{k}$, der dreidimensionale Wellenvektor $\vec{k}$, zeigt dann in Emissionsrichtung.

5.7 Emission und Absorption

Einen Photonenstrom können wir kovariant durch eine *Verteilungsfunktion* F, die Photonenzahl pro Phasenraumvolumen, beschreiben (s. [MTW73] S. 583ff). In einem lokalen Lorentzsystem hängt diese mit der Intensität wie folgt zusammen:

$$F = \frac{I}{h^4 \nu^3}.$$

Im Vakuum bleibt F längs einer Photonenbahn konstant. In einem durchscheinenden Medium gilt folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dF}{d\lambda} = -kF + Q. \tag{52}$$

Die Größen k und Q beschreiben Absorption und Emission im Medium. In einem lokalen Lorentzsystem lautet diese Gleichung:

$$\frac{dI}{ds} = -\kappa I + \epsilon.$$

κ ist der Absorptionskoeffizient, ϵ die Emissivität (erzeugte Energie pro Zeit, Volumen, Frequenzbereich und Raumwinkel). Diese Emissivität beinhalte auch die Einstreuung aus anderen Richtungen in Strahlrichtung. Der Zusammenhang mit den Größen k und Q ist durch

$$k = E_{\mathrm{Photon}} \kappa \qquad \text{und} \qquad Q = \frac{\epsilon}{h^3 \nu^2}$$

gegeben.

Um die Intensität am Austrittspunkt eines durchscheinenden Objekts zu erhalten, integrieren wir Gleichung (52) mit dem Anfangswert $F(\mathcal{P}(\lambda_i))$ längs des Lichtstrahls vom Eintrittspunkt $\mathcal{P}(\lambda_i)$ bis zum Austrittspunkt $\mathcal{P}(\lambda_o)$.

Interessiert man sich nur für die durch Dopplerverschiebung bzw. gravitative Rotverschiebung verursachte Frequenzänderung, so kann man die Frequenzen des Objektfarbenspektrums einfach mit dem Faktor

$$f = \frac{E_{\mathrm{Absorption}}}{E_{\mathrm{Emission}}}$$

multiplizieren. Dabei ist

$$\begin{aligned} E_{\text{Absorption}} &= \text{Photonenenergie im Ruhesystem der Kamera,} \\ E_{\text{Emission}} &= \text{Photonenenergie im Ruhesystem des Objekts.} \end{aligned}$$

$E_{\text{Absorption}}$ wird durch den Energie-Impulsvektor des Photons am Ort der Kamera bestimmt. E_{Emission} läßt sich einfach aus dem Photon-Energie-Impuls-Vektor $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ und der 4-Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ der Lichtquelle bestimmen (s. Abschnitt 2.14):

$$E_{\text{Emission}} = \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u} \rangle.$$

Wir setzen am Ort der Kamera $k^0 = 1$, damit ist $E_{\text{Absorption}} = \hbar$ und $f = 1/\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{u} \rangle$.

5.8 Die Photonenbahn (zum zweiten)

Wir verfolgen jetzt den Lichtstrahl ausgehend von dem am weitesten entfernten Objekt (dem ersten Eintrag der Liste) wieder zur Kamera zurück. Dabei integrieren wir in allen durchlaufenen Objekten die Emission und Absorption gemäß Gleichung (52) auf, um am Ende, wenn wir wieder bei der Kamera angelangt sind, das Spektrum zu erhalten, das aus der Richtung dieses Lichtstrahls kommt.

5.9 Das Pixel

Dem Pixel, von dem wir gestartet sind, geben wir nun eine aus dem berechneten Spektrum abgeleitete Farbe.

Falls wir einen Spektralbereich abbilden wollen, der außerhalb des sichtbaren Bereichs liegt (z. B. den Röntgenbereich), müssen wir das Spektrum zuerst in den sichtbaren Bereich transformieren (z. B. mit $I(\nu) \to I(k\nu)$).

Das so erhaltene Spektrum $I(\nu)$ enthält viel mehr Information, als unser Auge erfassen kann. Da dieses, wie die Farbenlehre lehrt, nur für drei unterschiedliche Farben empfindlich ist, genügt es, $I(\nu)$ auf einen dreidimensionalen Untervektorraum zu projizieren. Der so berechnete dreidimensionale *Farbvektor* könnte in einer entsprechenden Basis als Komponenten etwa die Amplituden eines RGB-Signals für einen Farbbildschirm enthalten. Auf das Thema der Farbdarstellung möchte ich in Abschnitt 7.6 noch einmal genauer eingehen.

5.10 Das Bild

Den in den letzten Abschnitten beschriebenen Algorithmus wenden wir nun auf alle Pixel des Bildes an.

5.11 Der Film

Wir unterteilen die *Eigenzeit* τ der Kamera in äquidistante Zeitschritte $\Delta\tau$ (für einen Videofilm wäre $\Delta\tau = 1/25\,\text{s}$). Für jeden Zeitschritt berechnen wir ein Bild mit Kameraposition ${x_k}^\alpha(\tau)$, -geschwindigkeit $\vec{v}_k(\tau)$ und -ausrichtung $\vec{a}_k(\tau)$. Nach Zusammenkleben aller Bilder erhalten wir den gewünschten Film.

6 Anwendungen

In diesem Kapitel möchte ich einige Anwendungen der oben beschriebenen Techniken vorstellen.

6.1 Visualisierung der Schwarzschild-Metrik

Bei diesem Projekt geht es nur um die Veranschaulichung der Raumzeitkrümmung und nicht um eine physikalisch korrekte Darstellung der Umgebung eines Neutronensterns oder Schwarzen Lochs. Deshalb verwende ich unrealistische, aber einfache geometrische Objekte mit ebenfalls unphysikalischen, aber die räumliche Vorstellung unterstützenden Oberflächenmustern. Diese Objekte bewegen sich in der Schwarzschild-Metrik und werden von einer simulierten Filmkamera aufgenommen. Der berechnete Film wurde auf 8 mm-Film, 16 mm-Film und Video aufgezeichnet.

Im Bildanhang sind einige Bildsequenzen aus diesem Film zu finden. Die in den Bildunterschriften aufgeführten physikalischen Größen sind in geometrischen Einheiten dimensionslos angegeben.

Die Abb. A.1a–f zeigen Neutronensterne mit gleich großer Oberfläche (Schwarzschild-r-Koordinate der Oberfläche $= 4$) aber verschiedener Masse M. In den Bildunterschriften ist außerdem das Verhältnis Sternradius zu Schwarzschildradius r/r_s angegeben. Je größer die Masse ist, desto weiter sieht man um den Stern herum und desto größer erscheint der Stern dem für jedes Bild in gleicher Entfernung sitzenden Beobachter. Das in Abb. A.1f gezeigte r/r_s-Verhältnis von $9/8$ ist die unterste Grenze für einen stabilen Stern aus inkompressibler Materie.

In Abb. A.2a–f und Abb. A.3a–f sind verschiedene Phasen des Umlaufs eines masselosen Begleitsterns um einen Neutronenstern ($r = 4$) dargestellt. In Abb. A.2 hat der Neutronenstern die Masse 0, die Raumzeit ist flach. Abb. A.3 zeigt „dieselbe“ Szene, nur hat der Neutronenstern die Masse 1, die Raumzeit ist also gekrümmt.

Die Anwendung des Begriffs „dieselbe Szene“ ist hier etwas problematisch, da verschieden gekrümmte Räume nicht längen- und winkeltreu auf einander abgebildet werden können (siehe dazu Abschnitt 7.2).

Im Verlauf der Bilderserie Abb. A.4 bildet sich im Zentrum eines Rings ein Schwarzes Loch mit von 0 bis 1 anwachsender Masse. Der innere Radius des Rings ist 8, der äußere 12 und die Dicke ist 1. Mit Radius ist hier 2π/Umfang gemeint.

Abb. A.5 zeigt dieses Schwarze Loch ($M = 1$) mit dem Ring in verschiedenen Winkelstellungen.

Ein der Physik etwas näheres Beispiel ist in Abb. A.6 und Abb. A.7 zu sehen. Hier ist die Geometrie einer *Akkretionssäule* (s. Abschnitt 6.4) dargestellt. Die Form der Säule ist durch das Magnetfeld des Sterns (wir nehmen hier ein Dipolfeld an) gegeben. Dieses ist so stark, daß sich ionisierte Materie nur längs der Magnetfeldlinien bewegen kann. Der Rand der Akkretionssäule wird somit aus Dipolfeldlinien gebildet.

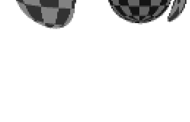


Abb. A.8 zeigt ebenfalls einen Neutronenstern mit Akkretionssäulen. Sie bestehen diesmal aus einem selbstleuchtenden Gas, das frei fallend auf den Stern stürzt. Die unterschiedlichen Färbungen beruhen auf einer Kombination von Gravitationsrotverschiebung und durch die hohe Geschwindigkeit verursachter Dopplerverschiebung. Wenn die Säule vor dem Stern steht, fällt das Gas vom Betrachter weg, das Spektrum wird rotverschoben und dunkler. Steht die Säule hinter dem Stern, fällt das Gas auf den Betrachter zu, es ergeben sich eine Blauverschiebung und Intensitätssteigerung.

6.2 Rotierende Neutronensterne

Als Beispiel für eine nicht kugelsymmetrische, numerisch vorgegebene Metrik wurden in Zusammenarbeit mit Joachim Heimberger Bilder eines rotierenden Neutronensterns berechnet.

In diesem Modell werden ausgehend von einer Zustandsgleichung für die Kernmaterie die Form eines mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit starr rotierenden Neutronensterns und die Metrik in seiner Umgebung selbstkonsistent berechnet.

Jede axialsymmetrische stationäre Metrik kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\boldsymbol{d}s^2 = e^{-2U}\left(e^{2\alpha}\, W_{,c}W_{,d}\, g^{cd}\, g_{ab}\, \boldsymbol{d}x^a \boldsymbol{d}x^b + W^2 \boldsymbol{d}\phi^2\right) - e^{2U}\left(\boldsymbol{d}t + A\boldsymbol{d}\phi\right)^2,$$

$$a, b, c, d = 1, 2.$$

Näheres zu dieser Metrik ist in [NEU84] und [NEU85] zu finden. Die vier Potentiale $U(x^1, x^2)$, $W(x^1, x^2)$, $\alpha(x^1, x^2)$ und $A(x^1, x^2)$ sind Skalare. Sie können aus den Skalarprodukten der zwei Killingvektoren $\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial t$ und $\boldsymbol{\eta} = \partial/\partial\phi$ berechnet werden:

$$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle = -e^{2U}, \qquad \langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle = -Ae^{2U}, \qquad \langle\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}\rangle = W^2 e^{-2U} - A^2 e^{2U},$$

$$e^{-2\alpha} = e^{-2U} W_{,c}W_{,d}\, g^{cd}.$$

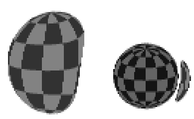
Diese Potentiale und damit die Metrik wurden für starr rotierende Neutronensterne (4-Geschwindigkeit der Sternmaterie $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\xi} + \Omega\boldsymbol{\eta}$; Ω = Winkelgeschwindigkeit für einen Beobachter im Unendlichen) von H. Herold numerisch bestimmt.

Die daraus, von J. Heimberger berechneten Christoffel-Symbole wurden nun in das Visualisierungsprogramm eingefüttert. Abb. A.9 zeigt das resultierende Bild.

6.3 Visualisierung eines Gravitationskollapses

Das zu beobachtende Objekt ist ein frei kollabierender, kugelsymmetrischer Stern (s. Abschnitt 4.6).

Zur Berechnung der Bahnkurve $\mathcal{P}(\lambda)$ eines radial frei fallenden Teilchens findet wieder die Geodätengleichung Verwendung. Die Anfangsbedingungen werden so



gewählt, daß sich das Teilchen für (Schwarzschild-) Zeiten $t < 0$ in Ruhe am Ort mit der Schwarzschild-r-Koordinate r_0 befindet.

Der in den Bilderserien Abb. A.10 und A.11 dargestellte Stern hat eine Masse von 1 und einen anfänglichen Radius von 4. Die Farbe entspricht der Strahlung eines schwarzen Körpers mit einer Temperatur von 20 000 K.

Die Rotfärbung des kollabierenden Sterns rührt von der wachsenden Gravitationsrotverschiebung, sowie von der Dopplerverschiebung der sich vom Beobachter mit immer größer werdender Geschwindigkeit entfernenden Sternoberfläche her.

Mit der Rotverschiebung ist gleichzeitig eine Intensitätsverminderung verbunden. Diese ist so stark, daß die Helligkeit der roten Pixel angehoben werden mußte um die Sichtbarkeit der geometrischen Struktur zu erhalten.

6.3.1 Beobachtung aus der Ferne

In Abb. A.10 bleibt der Beobachter in sicherem Abstand ($1000M$) in Ruhe sitzen. Wir erkennen, daß der mittlere Teil des Sterns zuerst zu kollabieren scheint. Dies ist ein Effekt der Lichtlaufzeiten. Der mittlere Teil des Bildes gehört zu dem Teil des Sterns, der näher beim Betrachter ist. Lichtstrahlen, die von dort kommen, sind nicht so lange unterwegs, wie diejenigen, die vom Rand kommen, und repräsentieren deswegen einen späteren Zustand des Kollapses.

In der Endphase des Kollapses ist nur noch ein schmaler Ring zu sehen. Er besteht aus Photonen, die tangential emittiert wurden, kurz bevor die r-Koordinate der Sternoberfläche den Wert $3M$ erreicht hatte. Bei $r = 3M$ sind für Photonen (instabile) Kreisbahnen möglich, so daß Photonen, die auf eine solche Umlaufbahn gelangen, den Stern mehrere Male umkreisen können bevor sie beim Beobachter ankommen (s. Abschnitt 3.3).

6.3.2 Beobachtung aus der Nähe

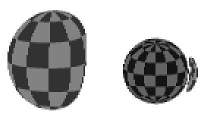
In Abb. A.11 beginnt der Beobachter gleichzeitig mit der Sternoberfläche frei zum Koordinatenursprung zu fallen. Zu Beginn des Kollapses befindet er sich bei $r = 6M$. Von der Durchquerung des Schwarzschildradius (Abb. A.11h) bemerkt er nichts. Die Bilderserie endet bei $r = 0$.

6.4 Lichtkurven von Röntgenpulsaren

6.4.1 Röntgenpulsare

Ein Röntgenpulsar ist ein stark magnetisierter, rasch rotierender Neutronenstern, der zusammen mit einem normalen Stern ein enges Doppelsternsystem bildet. Durch seinen kleinen Radius von etwa 10 km und seiner im Vergleich dazu großen Masse von ungefähr einer Sonnenmasse ist ein Neutronenstern ein äußerst kompaktes Objekt mit einer Dichte von $\approx 10^{15}\,\mathrm{g/cm^3}$.

Durch die starke Gravitationswirkung wird Masse aus dem normalen Begleitstern herausgezogen. Diese strömt auf den Neutronenstern zu und bildet um ihn



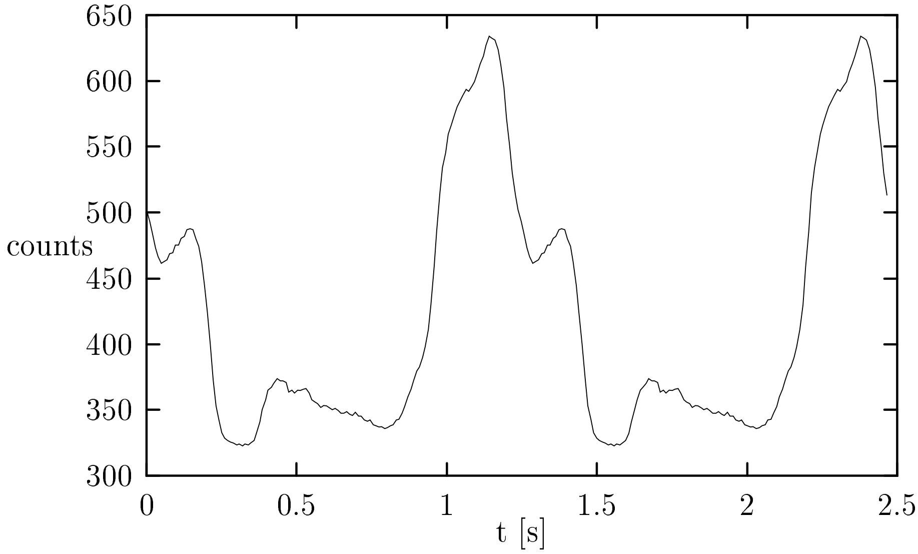


Abb. 5: Lichtkurve von Her-X1

herum eine dünne Scheibe, die sogenannte *Akkretionsscheibe*. Von deren innerem Rand stürzt die Materie dann endgültig auf die Neutronensternoberfläche. Die ionisierte Materie, die aus der Scheibe in das extrem starke Magnetfeld (10^8 – 10^9 Tesla an der Sternoberfläche) des Neutronensterns eintritt, kann sich nur noch längs der Magnetfeldlinien bewegen und wird daher zu den Magnetpolen hin gebündelt. Das fallende Plasma bildet über den Magnetpolen eine sogenannte *Akkretionssäule*.

Bei den beiden Magnetpolen treffen auf eine Fläche von nur wenigen Quadratkilometern 100 Milliarden Tonnen Materie pro Sekunde mit bis zu 70% der Lichtgeschwindigkeit auf. Dabei wird die Oberfläche durch die bei der Abbremsung freigesetzte kinetische Energie auf Temperaturen von ca. 100 Millionen Grad aufgeheizt, was zur Emission von Röntgenstrahlung führt. Die Emissionsgebiete werden *Hotspots* genannt.

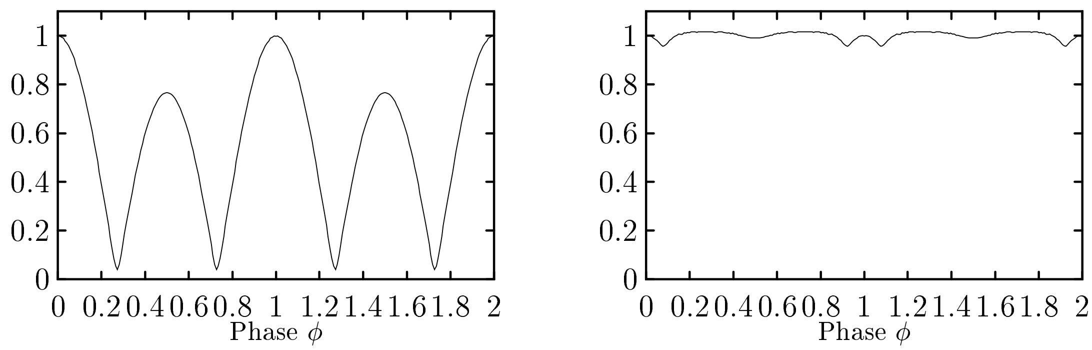
Die Abstrahlung des Röntgenlichts ist auf eine oder mehrere Vorzugsrichtungen konzentriert. Da die Achse durch die magnetischen Pole im allgemeinen nicht mit der Rotationsachse zusammenfällt, sehen wir die Röntgenstrahlung mit der Rotationsperiode gepulst.

6.4.2 Lichtkurven

Diese, mit Röntgensatelliten wie dem EXOSAT oder ROSAT empfangene, spektral- und zeitaufgelöste Strahlung ist die einzige Information, die wir von solch einem System bekommen können. In Abb. 5 ist eine Lichtkurve der Röntgenquelle Her X-1 dargestellt.

Zur Verifizierung eines physikalischen Modells dieses Systems müssen wir also die mit diesem Modell berechneten Lichtkurven mit den gemessenen vergleichen.

Daß die relativistische Lichtablenkung auf diese Lichtkurven einen großen Einfluß hat, wird aus Abb. 6 ersichtlich. Die Kurve mit Lichtablenkung verläuft viel



a: ohne Lichtablenkung

b: mit Lichtablenkung

Abb. 6: Lichtkurven zweier gegenüberliegender Hotspots

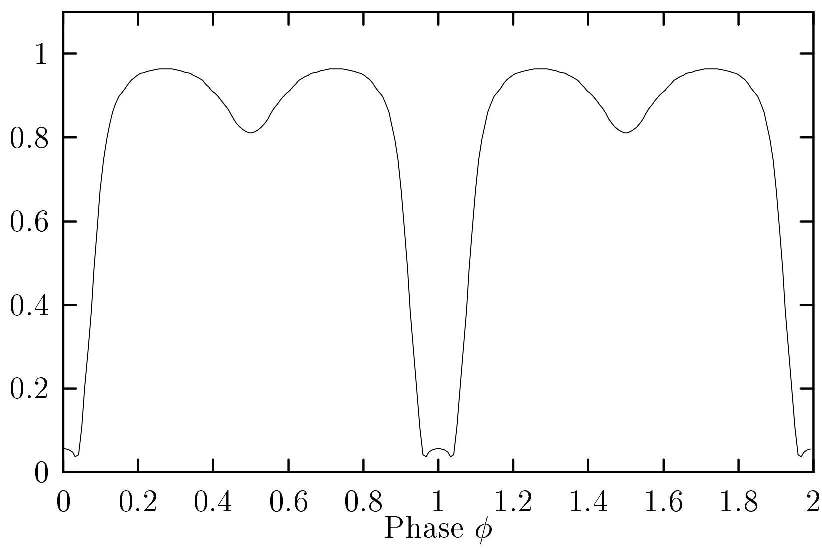
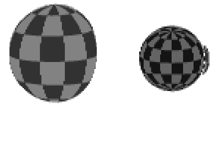


Abb. 7: Lichtkurve zweier gegenüberliegender Hotspots mit Streuung in der Akkretionssäule

flacher, was mit der größeren sichtbaren Sternoberfläche zu erklären ist (siehe auch Abb. A.1).

Berücksichtigt man noch die Streuung der vom Hotspot emittierten Strahlung in einer Akkretionssäule, so erhält man z. B. die Lichtkurve in Abb. 7. Diese Kurve basiert auf einem Modell von Ute Kraus ([KRA89]). Bei der Phasenlage $\phi = 0$, bei der die Akkretionssäule zum Betrachter hin zeigt, hat diese Kurve, im Gegensatz zur Kurve ohne Säule, ein *Minimum*. Dieses rührt von einer Resonanzstreuung in der Säule her. In der Höhe, in der die Zyklotronfrequenz der Elektronen im nach oben abnehmenden Magnetfeld des Neutronensterns genau so groß ist, wie die Energie der vom Hotspot emittierten Photonen, werden diese resonant gestreut.

Da für die Lichtkurven kein aufgelöstes Bild, sondern nur die Gesamtintensität gefragt ist, muß man nach der Bildberechnung noch über die Filmfläche integrieren (summieren). Die für verschiedene Winkelstellungen der Akkretionssäule



zum Beobachter berechneten Intensitätswerte können nun zu einer zeitaufgelösten Lichtkurve zusammengesetzt werden.

Interessant ist, daß fast alle beobachteten Lichtkurven *asymmetrisch* sind. Dies ist mit den bisher untersuchten Modellen, die auf zylindersymmetrischen Säulen basieren, nicht zu erklären. Zur Zeit wird der Einfluß unsymmetrischer Säulen (halbkreis- oder sichelförmiger Querschnitt) auf die Form der Lichtkurven untersucht. Solche Querschnitte folgen aus Überlegungen über die Art, wie Materie vom inneren Akkretionsscheibenrand auf die zum Stern führenden Magnetfeldlinien gelangt. Es stellt sich aber leider heraus, daß man, um unsymmetrische Kurven zu erhalten, zusätzlich die himmelsmechanisch wahrscheinliche Annahme, die Rotationsachse des Sterns stehe senkrecht auf seiner Bahnebene bzw. der Akkretionsscheibe, aufgeben muß.

6.4.3 Visualisierung zur Kontrolle der Geometrie

Da allein die Geometrie des zu modellierenden Systems schon sehr komplex ist, wird die Kontrolle seiner räumlichen Struktur zu einem wesentlichen Faktor bei der Umsetzung einer physikalischen Theorie in ein Computermodell.

Einfache Fehler, wie eine durch falsche Parameterwahl statt an der Sternoberfläche 10 km darüber endende Akkretionssäule, sind bei der Programmentwicklung nicht zu vermeiden. Sie lassen sich auf einem Bild wesentlich leichter erkennen, als etwa durch den Vergleich zweier Lichtkurven.

7 Technische Details

Dieses Kapitel enthält einige willkürlich ausgewählte Details der konkreten Arbeit und ist für denjenigen Leser gedacht, der sich mit ähnlichen Problemen beschäftigen will.

7.1 Koordinatensysteme

Im mathematischen Teil habe ich für die Darstellung des räumlichen Teils der Schwarzschild-Metrik Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) verwendet.

Für numerische Rechnungen im Raum haben Kugelkoordinaten aber den großen Nachteil, daß sie über den Polen $(\theta = 0)$ singulär werden: $g_{\phi\phi}$ ist dort $= 0$. Die Möglichkeit den Code zu vektorisieren wird durch die dadurch notwendigen Fallunterscheidungen stark eingeschränkt.

Ein zweiter Nachteil ist, daß Drehungen um eine Achse durch den Ursprung in Kugelkoordinaten nur mit sehr viel Trigonometrie beschreibbar sind.

Ich habe daher eine Art kartesischer Koordinaten (x, y, z) verwendet. Sie ergeben sich aus den Kugelkoordinaten nach den bekannten Umrechnungsformeln:

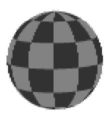
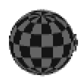
$$
\begin{aligned}
x &= r \cos\phi \sin\theta, \\
y &= r \sin\phi \sin\theta, \\
z &= r \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Diese Koordinaten gehen für große r in „richtige“ kartesische Koordinaten über. In der Nähe des Ursprungs weichen sie jedoch davon ab. Die Basisvektoren sind nicht mehr orthonormal; die Nichtdiagonalelemente der Metrik werden $\neq 0$. Mit

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\
c_1 &= \frac{2M}{r^2(r - 2M)}, \\
c_2 &= \frac{M(r - 2M)}{r^4}, \\
c_3 &= \frac{M(4M - 3r)}{r^5(r - 2M)}, \\
c_4 &= \frac{2M}{r^3}
\end{aligned}
$$

sind die Metrik

$$
g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -(1 - 2M/r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + c_1 x^2 & c_1 xy & c_1 xz \\ 0 & c_1 yx & 1 + c_1 y^2 & c_1 yz \\ 0 & c_1 zx & c_1 zy & 1 + c_1 z^2 \end{pmatrix}
$$

und die Christoffel-Symbole:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{i0} = \Gamma^0{}_{0i} &= \frac{1}{2}\, c_1\, x^i, \\
\Gamma^i{}_{00} &= c_2\, x^i, \\
\Gamma^i{}_{kk} &= c_3\, x^i x^k x^k + c_4\, x^i, \\
\Gamma^i{}_{kl} = \Gamma^i{}_{lk} &= c_3\, x^i x^k x^l \qquad \text{für } k \neq l.
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich die Differentialgleichungen für die Photonenbahnen:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}^0 &= -\frac{1}{2} c_1\, \dot{x}^0 \sum_i x^i \dot{x}^i, \\
\ddot{x}^i &= -\left[c_2 (\dot{x}^0)^2 + c_3 \left(\sum_i x^i \dot{x}^i \right)^2 + c_4 \sum_i (\dot{x}^i)^2 \right] x^i.
\end{aligned}
$$

Aus der Kugelsymmetrie kann man weiter folgern, daß sich in diesen pseudokartesischen Koordinaten Drehungen um eine Achse durch den Ursprung genauso wie bei richtigen kartesischen Koordinaten mit Drehmatrizen beschreiben lassen.

Ein weiterer Vorteil dieser Koordinaten ist, daß Photonenbahnen für große r durch lineare Interpolation der Koordinatenwerte sehr gut angenähert werden können.

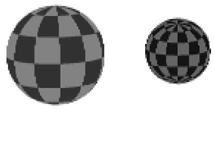
7.2 Was heißt: „dieselbe Szene“?

Im Kapitel 6.1 wurde der Begriff „dieselbe Szene“ verwendet, um auszudrücken, daß zwei Bilder bis auf die Raumzeitkrümmung die gleiche physikalische Situation darstellen sollen. Hier zeigt sich ein grundlegendes Problem: Genausowenig wie auf einer gekrümmten Kugeloberfläche dasselbe Muster wie auf einer ebenen Fläche dargestellt werden kann, ist es in einem gekrümmten Raum möglich, eine aus dem flachen Raum kommende Geometrie längen- und winkeltreu zu übernehmen.

Bei einer solchen Übertragung haben wir prinzipiell zwei Möglichkeiten:

Erstens können wir versuchen, die *Bedeutung* eines geometrischen Objektes zu erhalten. Damit ist gemeint, daß z. B. eine Kugel eine Kugel bleibt, oder daß eine mit einem Meterstab gemessene Länge gleich bleibt. Daß dies nicht konsistent durchzuhalten ist, ist klar. Außerdem stellt sich die Frage, welche von mehreren im flachen Raum gleichwertigen, sich aber jetzt widersprechenden Definitionen eines geometrischen Objektes man bevorzugt. Eine Kugel mit *Radius R* könnte man z. B. so definieren:

> Eine Kugeloberfläche **M** besteht aus allen Punkten $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\lambda_\mathcal{K})$ deren Verbindungsgeodäten $\mathcal{P}(\lambda)$ zu einem gegebenen Mittelpunkt $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\lambda_\mathcal{M})$ die Länge R haben:
>
> $$\int_\mathcal{M}^\mathcal{K} \boldsymbol{ds} = \int_{\lambda_\mathcal{M}}^{\lambda_\mathcal{K}} \sqrt{\boldsymbol{u}^2}\, d\lambda = R,$$



mit

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\mathcal{P}(\lambda)}{d\lambda}, \qquad \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} = 0.$$

Oder:

> Eine Kugeloberfläche ist eine geschlossene Fläche konstanter Krümmung mit der Oberfläche $A = 4\pi R^2$.

Oder:

> Eine Kugel ist ein Raumgebiet mit dem Volumen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ und minimaler Oberfläche.

Jede dieser gleichberechtigten Definitionen ergibt im euklidischen Raum die gleiche, im gekrümmten Raum eine verschiedene Fläche.

Die zweite Möglichkeit, eine im flachen Raum gegebene Szene in den gekrümmten zu übertragen, ist, zwei Koordinatensysteme zu wählen, die in beiden Räumen eine „möglichst ähnliche“ Metrik haben und dann die im flachen Raum gegebenen Punkte an dieselben Koordinaten im gekrümmten Raum zu setzen.

Ich habe die zweite Methode gewählt, da sie zwar genauso mehrdeutig ist, wie die erste, aber rechnerisch wesentlich einfacher zu handhaben.

In diesem Sinne entsprechen die Bilder Abb. 2 und Abb. 3 *nicht* derselben Szene. Bei beiden sind jedoch die in Abschnitt 5 erwähnten, zur Beschreibung der Kugelgeometrie verwendeten Abstandsfunktionen $D(\mathcal{P})$ gleich definiert:

$$D(\mathcal{P}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(x^i(\mathcal{P}) - x^i(\mathcal{M})\right)^2} - R_K,$$

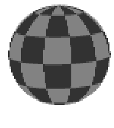
wobei $\mathcal{M}$ der Kugelmittelpunkt und R_K der Kugelradius ist.

7.3 Rechenzeitoptimierung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden über 12 000 Bilder mit je $1000 \cdot 1000$ Punkten berechnet. Betrachtet man diese enorme Datenmenge, wird klar, daß sie nur in endlicher Rechenzeit zu bewältigen ist, wenn man nicht für jedes der $\approx 10^{10}$ Pixel die Geodätengleichung von der Kamera bis zu den abzubildenden Objekten integriert, sondern versucht, erstens die Anzahl der zu berechnenden Pixel und zweitens den Rechenaufwand pro Pixel zu minimieren.

7.3.1 Minimierung der Anzahl der zu berechnenden Punkte

Es geht darum, die Punkte herauszufinden, bei denen sich eine genaue Berechnung lohnt, d. h. diejenigen, deren Werte sich wesentlich von den Werten ihrer Nachbarpunkte unterscheiden.



Dazu wird das Bild zuerst mit einem groben Gitter, das jede freistehende Struktur mit mindestens einem Punkt erfaßt, überzogen. Dort wo sich benachbarte Gitterpunkte stark unterscheiden, wird rekursiv verfeinert, bis die gewünschte Auflösung erreicht ist.

In dem so berechneten, je nach Bildinhalt örtlich verschieden fein aufgelösten, Gitter unterscheiden sich benachbarte Gitterpunkte jetzt so wenig, daß die noch fehlenden Punkte ohne großen Fehler durch Interpolation ermittelt werden können.

Bei den meisten berechneten Bildern konnte damit die Anzahl der zu berechnenden Pixel um den Faktor 20–30 reduziert werden.

Da dieser Algorithmus quasi „an den Objektkanten entlang rechnet“, ergibt sich außerdem ein nur etwa *linear* mit der Bildgröße ansteigender Rechenaufwand.

7.3.2 Minimierung des Rechenaufwands für ein Pixel

In einer kugelsymmetrischen Metrik laufen die Photonen in einer Ebene durch den Koordinatenursprung. Um alle Photonenbahnen zu kennen, genügt es also, diese in *einer* Ebene (z. B. der Äquatorebene) zu berechnen. Die qualitativ verschiedenen Bahnen (die, die sich nicht durch Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen aufeinander abbilden lassen) bilden eine *eindimensionale* Kurvenschar. Als Scharparameter kann z. B. der *Stoßparameter* b gewählt werden.

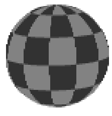
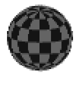
Diese Bahnen können in einer zweidimensionalen (Indizes = b, λ) Tabelle abgelegt und in einer Datei für sämtliche Bilder der Schwarzschild-Metrik gespeichert werden. Um eine spezielle Bahn zu erhalten, muß nur eine dazu passende (mit gleichem b) aus der Tabelle ausgelesen und mit einer Drehmatrix in die gewünschte Ebene gedreht werden.

Verwendet man die oben erwähnten pseudokartesischen Koordinaten, können die für die Rechnung benötigten Punkte der Photonenbahn $\mathcal{P}(b, \lambda)$ mit relativ kleinem Fehler durch *lineare* Interpolation zwischen den in der Tabelle vorhandenen Stützstellen berechnet werden.

7.4 Beschreibungssprache für Objekte und Filmsequenzen

Zur Beschreibung der Geometrie und anderer Parameter einer abzubildenden Szene wurde eine Beschreibungssprache entwickelt. So können verschiedene Filmsequenzen mit demselben Programm berechnet werden. Für jede Filmsequenz wird in dieser Sprache ein Daten-File erstellt, das zu Beginn des Programms eingelesen, interpretiert und in eine interne Datenstruktur umgesetzt wird. Vor der Interpretation wird das Daten-File noch mit dem C-Preprozessor bearbeitet, so daß dessen Möglichkeiten (Kommentare, `#include`, `#define`, `#ifdef` usw.) uneingeschränkt genutzt werden können.

Die Syntax der Sprache ist an LISP angelehnt. Das Datenfile besteht aus einer Folge von Listen:

```
(func arg1 arg2 ...)
(func arg1 arg2 ...)
```

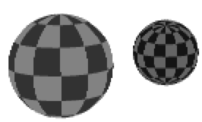
Das erste Element einer Liste ist eine Funktion, die auf die restlichen Elemente angewendet wird.

Die einzelnen Objekte einer Szene können als hierarchische Struktur aus Grundelementen wie Kugeln, Kegelstümpfen und Zylindern mittels beliebig kombinierbarer Koordinatentransformationen (Drehungen um Koordinatenachsen und Verschiebungen) zusammengesetzt werden. Außerdem gibt es die Möglichkeit mit „unsichtbaren“ Objekten Stücke wieder „herauszuschneiden“. Der Ring um den Neutronenstern beispielsweise besteht aus einem flachen Zylinder, aus dem in der Mitte ein kleinerer Zylinder „herausgestanzt“ wurde. Um festzulegen, welches von zwei sich überlappenden Objekten gültig ist, kann jedem Objekt eine Priorität zugeordnet werden. In oben genanntem Beispiel muß der innere Ring eine höhere Priorität haben als der äußere. Der Neutronenstern besitzt die höchste Priorität.

7.4.1 Beispiel eines Daten-Files

Dieses Daten-File beschreibt einen Neutronenstern mit Ring. Das Ganze dreht sich in 0.5°-Schritten um sich selbst.

```
/* Daten-File bs */

#include "names.h"

/* Definition der Filmsequenz */
(defmovie
 (loop (720 (0) (0.5))  /* definiert Parameter $1 zu 0, 0.5, ... 359.5 */
)

(set Masse 1.0)
(setname bs)

/* Kameraposition und Brennweite */
(defcamera (pos 120 0 0) (foc 2.0))

/* Definition von verschiedenen Koordinatendrehungen */
#define SternRot 100
#define Raumdrehung 300

/* Koordinaten-Transformationen def. */
(deftrafo SternRot
 (rot Z 0)
)

(deftrafo Raumdrehung
 (rot Y $1)  /* Drehung um die in der defmovie-Anweisung definierten Winkel */
)

(deftrafo NeutronensternTrafo
 (trafo SternRot) (trafo Raumdrehung)
)
```

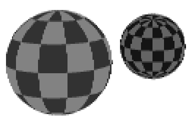
```
(deftrafo ScheibeTrafo
 (trafo Raumdrehung)
)

/* Objekt Neutronenstern def. */
(defobject Neutronenstern
 (trafo NeutronensternTrafo)
 (struct opaque)
 (proc Karo)
)

/* Geometrie von Neutronenstern def. */
(defsolid 1 0
 (trafo NeutronensternTrafo)
 (prio NeutronensternPrio)
 (ball 4)
 (object Neutronenstern)
)

/* Objekt Scheibe def. */
(defobject Scheibe
 (trafo ScheibeTrafo)
 (struct opaque)
 (proc Karo)
)

/* Geometrie von Scheibe def. */
(defsolid 4 0
 (trafo ScheibeTrafo)
 (object Scheibe)
)

/* Kinder von 4 */
(defsolid 41 4 (prio 100) (cone -0.5 1.0 12 12))
(defsolid 42 4 (prio 200) (cone -1.0 2.0 8 8) (object InvisibleObject))
```

7.5 Wie entsteht ein Film?

Zur Aufnahme von 8 mm- oder 16 mm-Filmen besitzt die Theoretische Astrophysik der Uni Tübingen eine abdunkelbare Ecke, in der auf einer optischen Bank vor einem hochauflösenden Farbbildschirm eine Filmkamera montiert werden kann. Die Bilder eines Films werden einzeln auf den Schirm gebracht und mit ca. 2 s Belichtungszeit aufgenommen. Einzelbildaufnahmen sind notwendig, weil die Plattenzugriffszeiten zu lang sind, um die Bilder in Echtzeit (18 bzw. 24 Bilder/s) auf den Bildschirm zu bringen. Außerdem kann durch die lange Belichtungszeit ein niedrigempfindlicher und damit höherauflösender Film verwendet werden.

Für Videofilme ist das Einzelbildverfahren ungeeignet, da die Aufnahme eines Bildes wegen der notwendigen Synchronisation von Band und Aufnahmekopf ca. 30 sec dauert. Außerdem wäre der Verschleiß des Aufnahmekopfes sehr hoch.

Das Rechenzentrum der Universität Stuttgart bietet zur Zeit folgende Lösung an: Die Bilder werden einzelbildweise auf eine optische Platte geschrieben, von der



sie dann in Echtzeit sequentiell auf Videoband überspielt werden können.

7.6 Farbendarstellung

Das zu visualisierende physikalische Modell liefert uns ein Spektrum $I(\nu)$. Es ist im allgemeinen unmöglich, einen Bildschirm oder ein Fotopapier dazu zu bewegen, dieses Spektrum originalgetreu abzustrahlen bzw. bei einer bestimmten Beleuchtung zu reflektieren. Glücklicherweise ist das auch gar nicht notwendig. Das auf Erfahrungstatsachen basierende *farbmetrische Grundgesetz* ([RICH80] S. 31f) besagt nämlich (Zitat):

> **Das helladaptierte trichromatische Auge bewertet die einfallende Strahlung nach drei voneinander unabhängigen spektralen Wirkungsfunktionen linear und stetig, wobei sich die Einzelwirkungen zu einer untrennbaren Gesamtwirkung addieren.**

Oder kurz ausgedrückt: Farben sind Elemente eines dreidimensionalen Vektorraums.

Das Spektrum kann als Element eines unendlichdimensionalen Vektorraums aufgefaßt werden. Es enthält also viel mehr Information, als unser Auge erfassen kann. Die oben erwähnte Bewertung mit drei Empfindlichkeitskurven $e_i(\nu)$ entspricht einer Projektion auf einen dreidimensionalen Untervektorraum mit der Basis $e_i(\nu)$ $(i = 1, 2, 3)$:

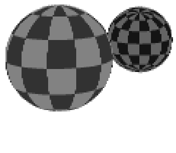
$$F_i = \int I(\nu) e_i(\nu)\, d\nu, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{53}$$

Dieser dreidimensionale *Farbvektor* F repräsentiert eindeutig den Farbeindruck, den unser Auge von dem gegebenen Spektrum hat.

Die Farbdarstellung auf einem Bildschirm bzw. Film oder Videoband beruht in dem hier verwendeten RGB-Farbmodell auf der additiven Farbmischung der drei Grundfarbenkomponenten Rot, Grün und Blau. D. h. diese drei Farben bilden die Basis, in der alle Farben durch einen 3-Vektor dargestellt werden können. Die Komponenten (R, G, B) dieses Vektors sind die Anteile der Grundfarben an dieser Farbe.

Die Menge der auf einem Bildschirm darstellbaren Farben ist allerdings technischen Einschränkungen unterworfen. Negative Farbkomponenten, die bei der Abbildung von reinen Spektrallinien vorkommen würden, können natürlich nicht dargestellt werden. Nach oben sind die Amplituden ebenfalls beschränkt.

Bei einem relativ flach verlaufenden Spektrum, wie etwa dem Planckspektrum, kann man die Integrale aus Gleichung (53) durch eine Summe aus wenigen gewichteten Einzelintensitäten ersetzen.



8 Zusammenfassung

Man nehme eine Kamera, setze sie an eine beliebige Stelle des Weltalls, und betätige den Auslöser.

Was ist nach dem Entwickeln auf dem Film zu sehen?

Diese Frage stellten wir uns am Anfang der Arbeit. Motiviert wurde sie durch den Wunsch, astrophysikalisch interessante Vorgänge anschaulich zu machen und sie damit besser verstehen zu können.

In der Einleitung wurde die These aufgestellt, daß ein Film die beste Möglichkeit sei, physikalische Vorgänge *anschaulich* und — relativistischer Tradition folgend — *kovariant* darzustellen.

Mangels Reisemitteln konnte ein solcher Film leider nicht vor Ort gedreht werden. Wir mußten uns mit einer simulierten Kamera in das simulierte Universum im Innern eines Computers begeben.

Ein Standardverfahren um photorealistische Bilder zu berechnen, ist das sogenannte *Ray-Tracing*: Zu jedem Punkt der Filmfläche suchen wir die Herkunft eines dort auftreffenden Lichtstrahls. Dazu wird jeder Lichtstrahl von der Kamera aus rückwärts verfolgt, bis er ein darzustellendes Objekt trifft.

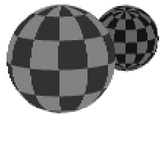
Das üblicherweise verwendete Ray-Tracing-Verfahren basiert auf einer geradlinigen unendlich schnellen Lichtausbreitung in einem dreidimensionalen euklidischen Raum.

Diese Grundlagen sind in der Nähe kompakter kosmischer Objekte nicht mehr haltbar. In dieser Arbeit wird deshalb das Ray-Tracing-Verfahren in zwei wichtigen Punkten erweitert:

- Übergang vom dreidimensionalen Raum zur vierdimensionalen Raumzeit: Damit können relativ zur Kamera bewegte Objekte unter Berücksichtigung von Lichtlaufzeiten, Aberration, Lorentzkontraktion, Dopplereffekt usw. physikalisch korrekt *und* mathematisch einfach dargestellt werden.

- Übergang von einer flachen zu einer beliebig gekrümmten Raumzeit: Damit werden Effekte erfaßt, die durch gravitative Lichtablenkung oder durch die ungewöhnliche Kausalstruktur in der Nähe eines Schwarzen Loches entstehen.

Mit diesen Verallgemeinerungen wird es möglich, in auf der Erde unvorstellbaren, im Weltall aber alltäglichen Umgebungen zu physikalisch korrekten Bildern zu kommen.



Literatur

[KRA89] Kraus, U., Rebetzky, A., Herold, H., Nollert, H. P., Maile, T., Ruder, H.: 1989, *Accretion onto Neutron Stars: Radiative Transfer in a Strong Gravitational Field, Proc. 23nd ESLAB Symp.*, Bologna, Italy

[MTW73] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: 1973, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, USA

[NEU84] Neugebauer, G., Herlt, E.: 1984, *Class. Quantum Grav.*, **1**, 695

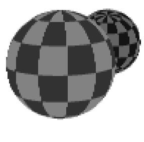
[NEU85] Neugebauer, G.: 1985, *Proceedings of the Balatonszeplák Relativity Workshop*, **103**, (Ed. Z. Perjés, Budapest)

[NOL90] Nollert, H. P.: 1990, *Astrophysik in der Schwarzschildmetrik am Beispiel von Quasi-Normalmoden Schwarzer Löcher und Lichtablenkung bei Röntgenpulsaren*, Dissertation Tübingen

[SEX87] Sexl, R., Urbandtke, H. K., 1987, *Gravitation und Kosmologie*, 3. Auflage, BI-Wiss.-Verl., Mannheim, Wien, Zürich

[RICH80] Richter, M.: 1980, *Einführung in die Farbmetrik*, 2. Auflage, de Gruyter, Berlin, New York

[THI77] Thirring, W.: 1977, *Lehrbuch der Mathematischen Physik, Band 1*, Springer-Verlag, Wien, New York



A Bilder

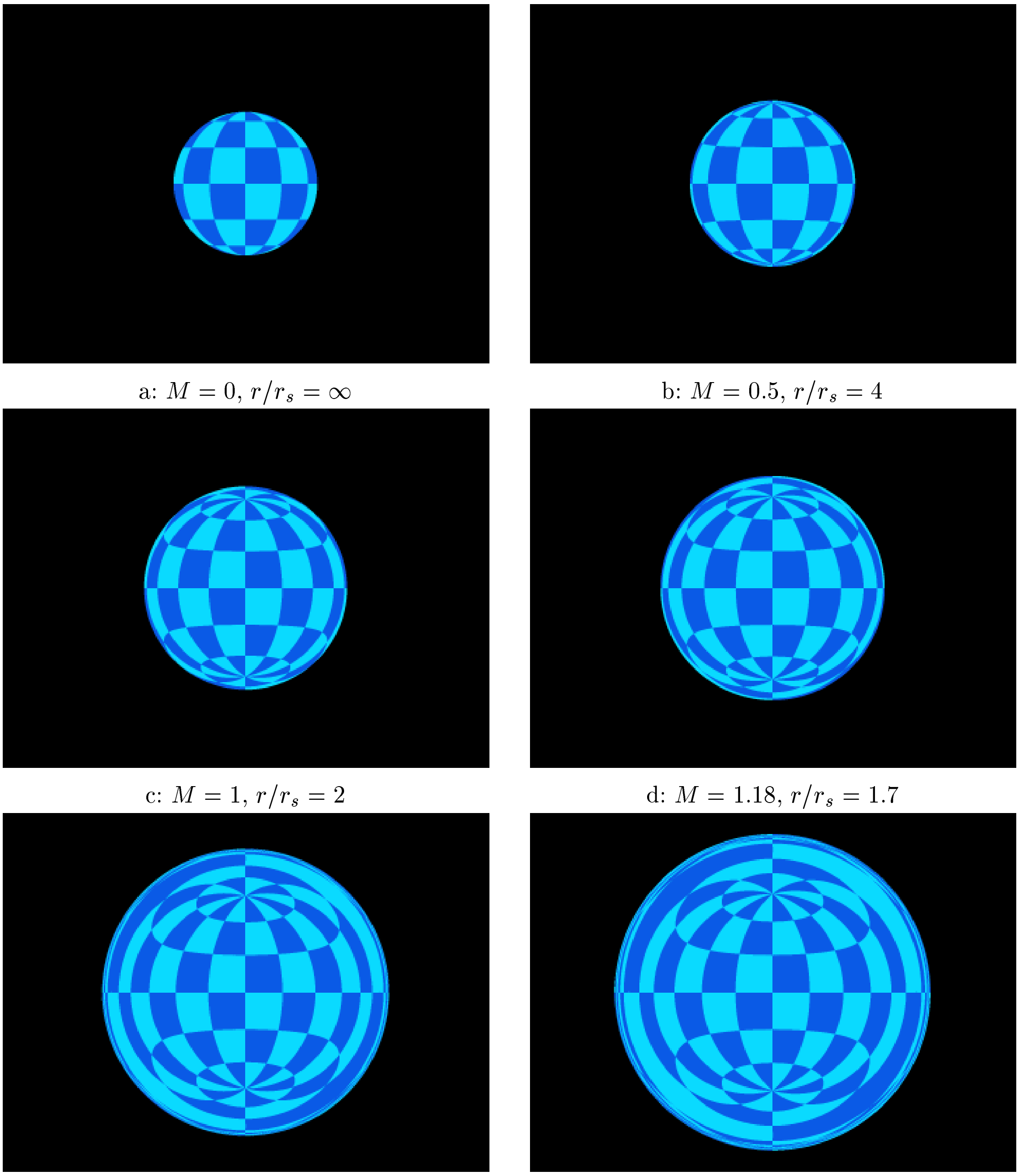
Auf den folgenden Seiten sind einige der berechneten Bilder abgedruckt. Die in den Bildunterschriften aufgeführten physikalischen Größen sind in geometrischen Einheiten dimensionslos angegeben. Nimmt man als Längeneinheit z. B. 2 km, so erhält man Größenordnungen, die bei einem typischen Neutronenstern vorkommen. Der Masse 1 entsprechen dann ca. 1.5 Sonnenmassen. Die Zeiteinheit wäre 6.6 ms.

Die Bilder Abb. A.1 – A.7 zeigen verschiedene Objekte in der Schwarzschildmetrik. Hier soll der Einfluß der gravitativen Lichtablenkung auf das „Aussehen" dieser Objekte deutlich gemacht werden.

In Abb. A.8 ist ein Neutronenstern mit zwei Akkretionssäulen dargestellt. Die Säulen bestehen aus einem leuchtenden Gas, das mit großer Geschwindigkeit (bis zu 0,7 c) auf den Stern fällt. Die verschiedenen Färbungen der beiden Säulen werden durch den relativistischen Dopplereffekt verursacht. Die hintere Säule ist aufgrund der gravitativen Lichtablenkung auf beiden Seiten des Sterns zu sehen.

Viele Neutronensterne rotieren sehr schnell. Die Zentrifugalkraft verursacht eine Abplattung des Sterns. Außerdem ändert sich die Metrik in seiner Umgebung. Die Photonen werden etwas „mitgeführt". In Abb. A.9 ist ein solcher Stern dargestellt.

Die letzten beiden Bildsequenzen zeigen das Entstehen eines Schwarzen Loches, einen Gravitationskollaps. Für einen entfernten Beobachter ist ein solcher Kollaps in Abb. A.10, für einen mitfallenden Beobachter in Abb. A.11 dargestellt. Interessant ist, daß der Kollaps für jeden der beiden Beobachter *qualitativ* verschieden abläuft. Der entfernte Beobachter sieht, wie die Sternoberfläche nach innen fällt, sich dem Schwarzschildradius immer weiter nähert, ihn aber nie überschreitet. Der mitfallende Beobachter fällt hinter der Sternoberfläche durch den Schwarschildradius hindurch (Abb. A.11h), ohne etwas davon zu bemerken.



a: $M = 0$, $r/r_s = \infty$

b: $M = 0.5$, $r/r_s = 4$

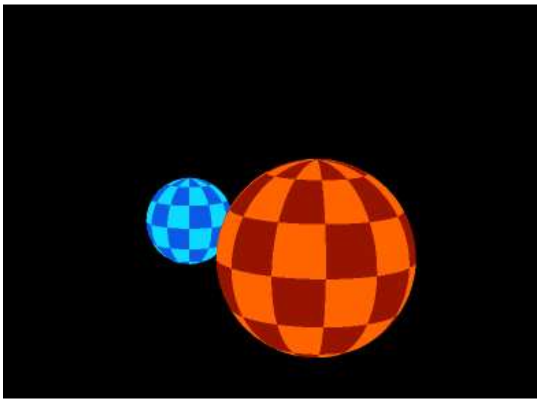
c: $M = 1$, $r/r_s = 2$

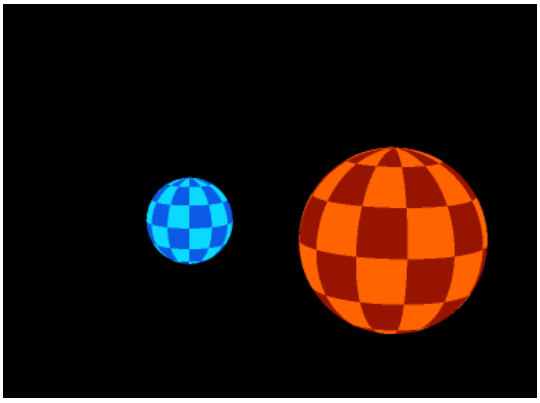
d: $M = 1.18$, $r/r_s = 1.7$

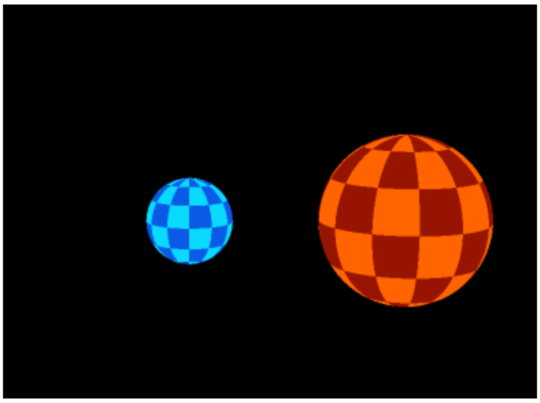
e: $M = 1.54$, $r/r_s = 1.3$

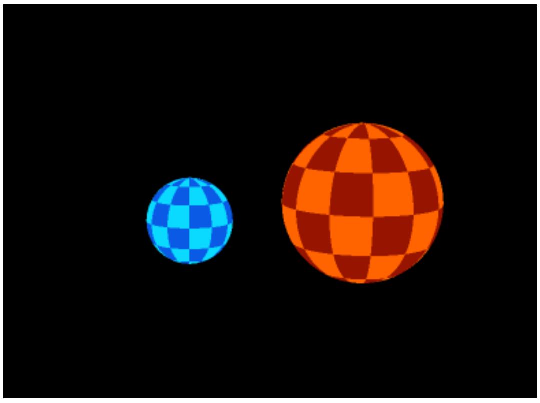
f: $M = 1.78$, $r/r_s = 9/8$

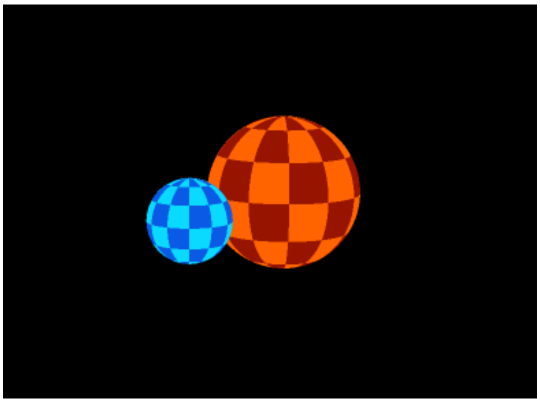
Abb. A.1: Neutronenstern mit Radius 4 und variabler Masse


a: 30°


b: 60°


c: 90°


d: 120°


e: 150°

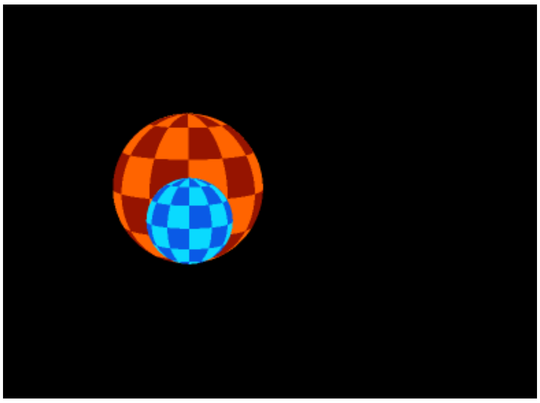
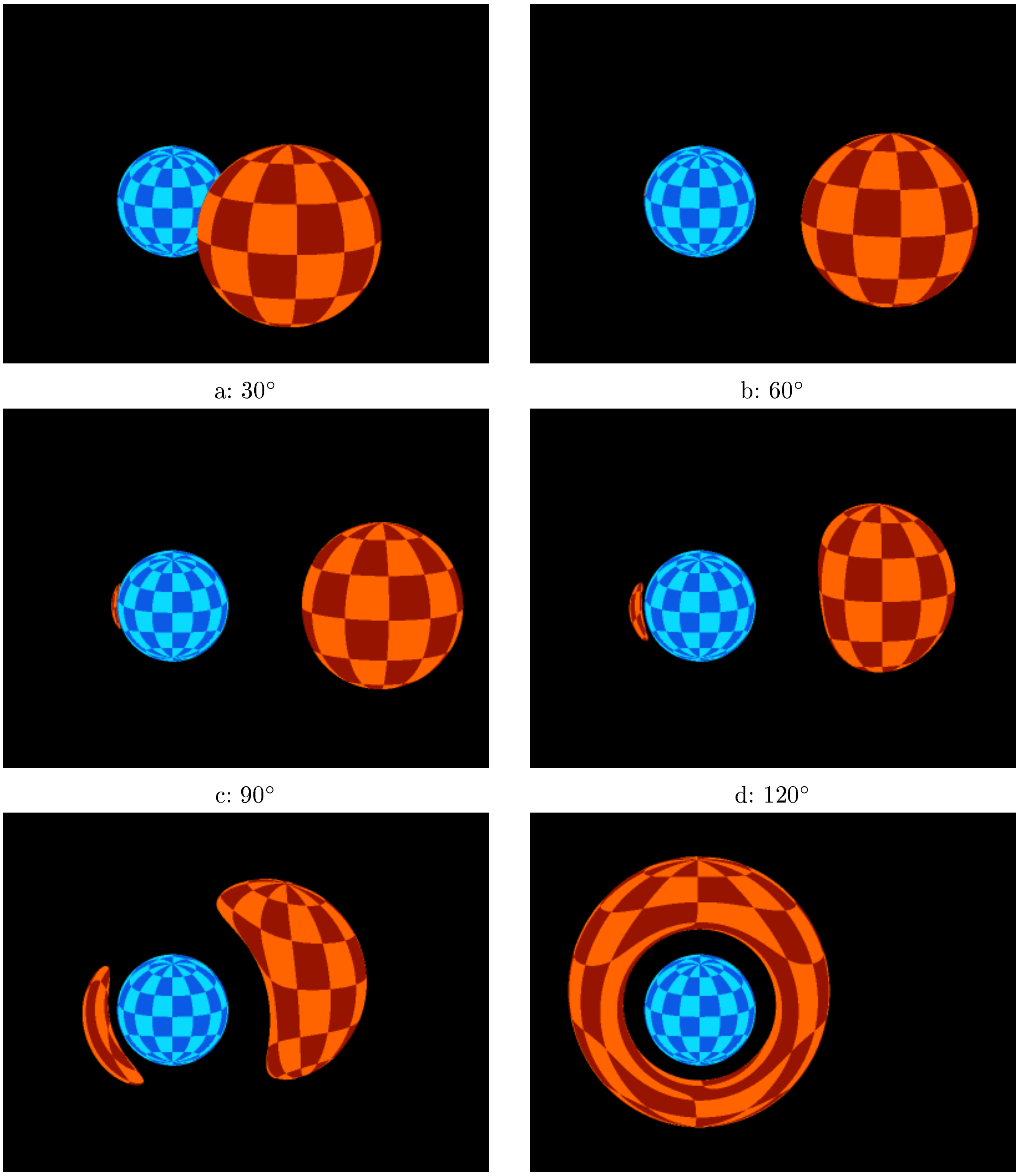

f: 180°

Abb. A.2: Umlauf eines masselosen Begleitsterns um einen Neutronenstern. Masse des Neutronensterns: 0, Radius des Neutronensterns: 4, Radius des Begleitsterns: 8, Bahnradius: 20

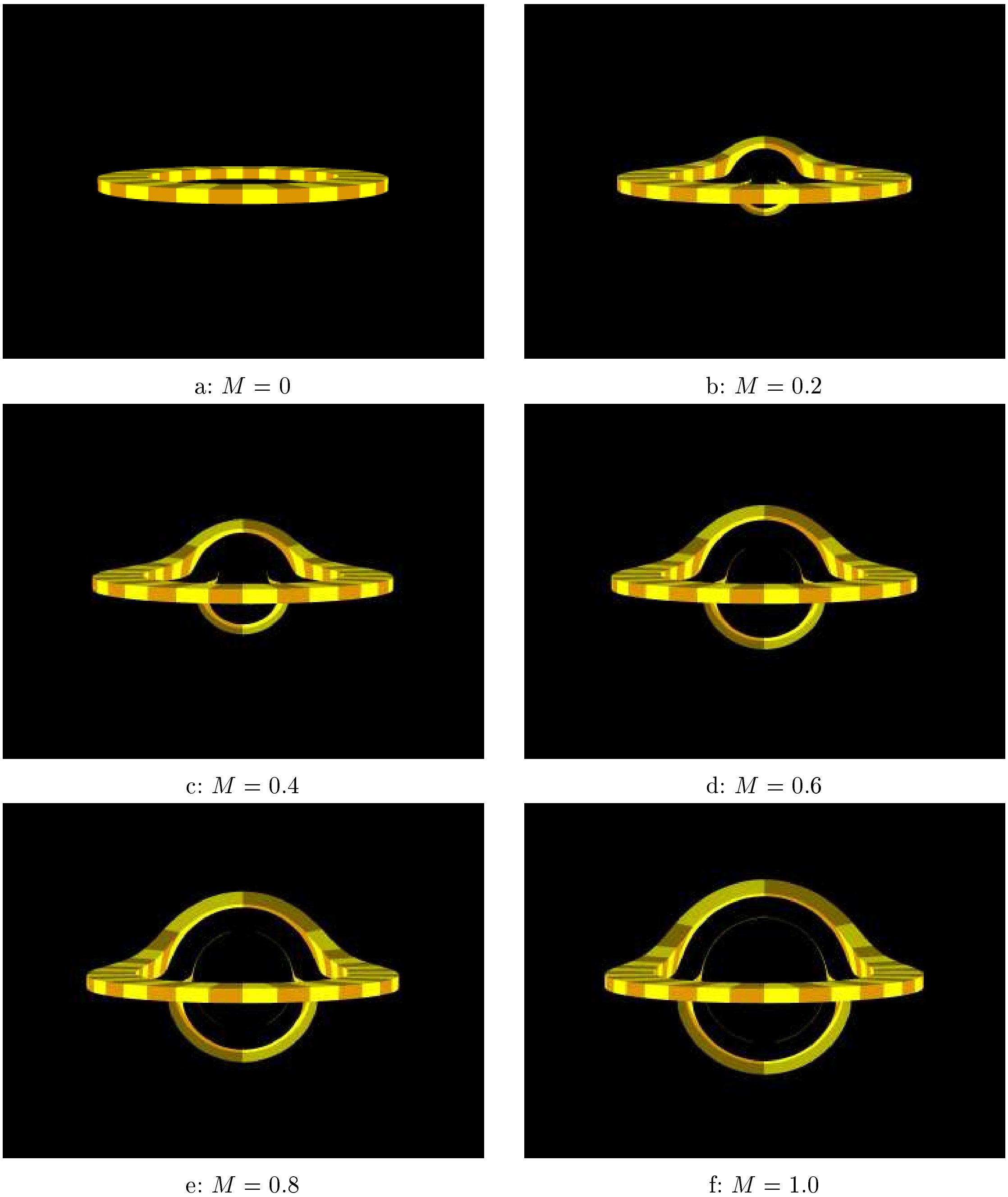


a: 30°   b: 60°

c: 90°   d: 120°

e: 150°   f: 180°

Abb. A.3: Umlauf eines masselosen Begleitsterns um einen Neutronenstern. Masse des Neutronensterns: 1, Radius des Neutronensterns: 4, Radius des Begleitsterns: 8, Bahnradius: 20



a: $M = 0$

b: $M = 0.2$

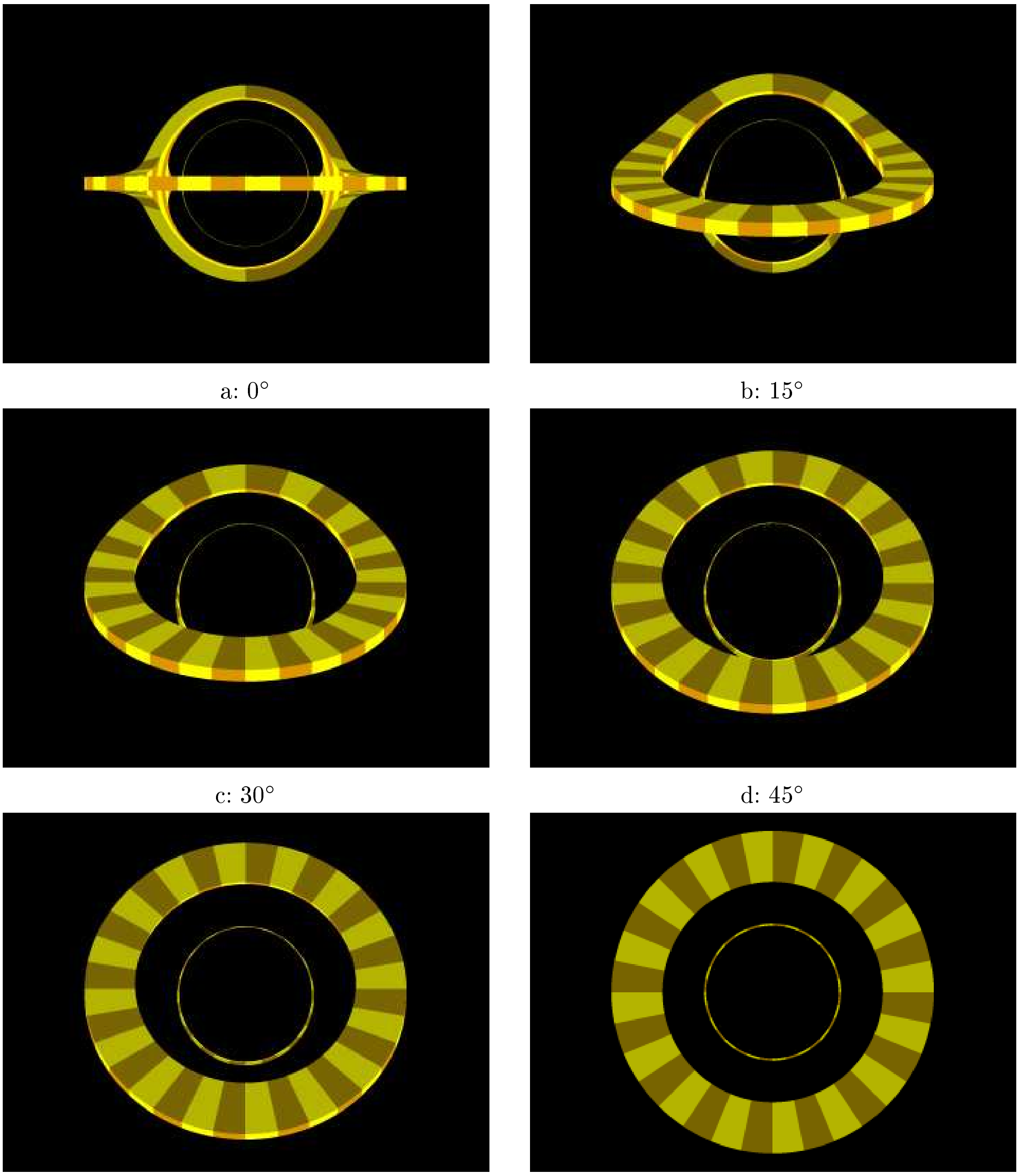
c: $M = 0.4$

d: $M = 0.6$

e: $M = 0.8$

f: $M = 1.0$

Abb. A.4: Im Zentrum eines Rings (innerer Radius 8, üßerer Radius 12, Dicke 1) bildet sich ein Schwarzes Loch mit wachsender Masse



a: 0° b: 15°

c: 30° d: 45°

e: 60° f: 90°

Abb. A.5: Ring um Schwarzes Loch ($M = 1$) in verschiedenen Stellungen

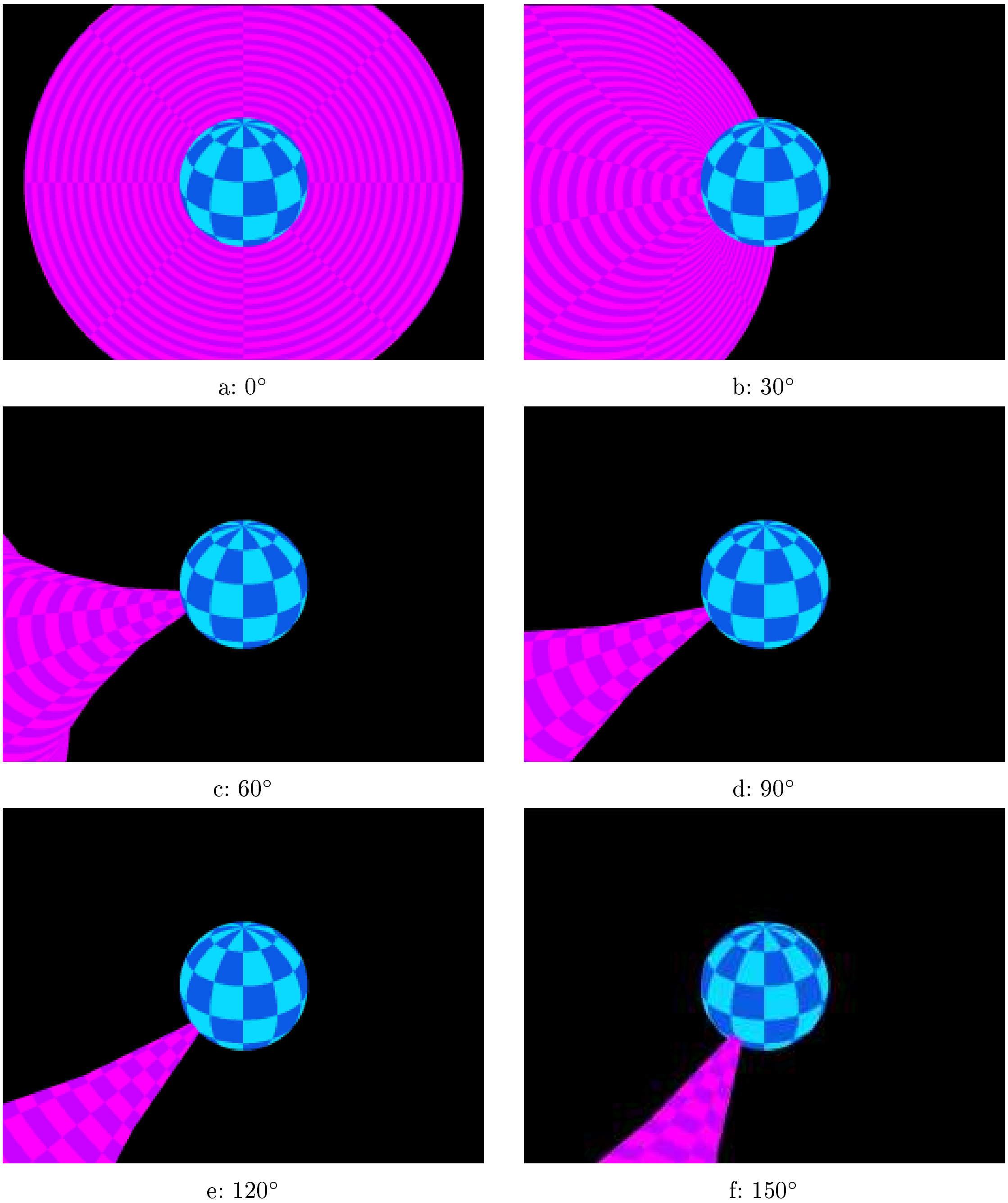
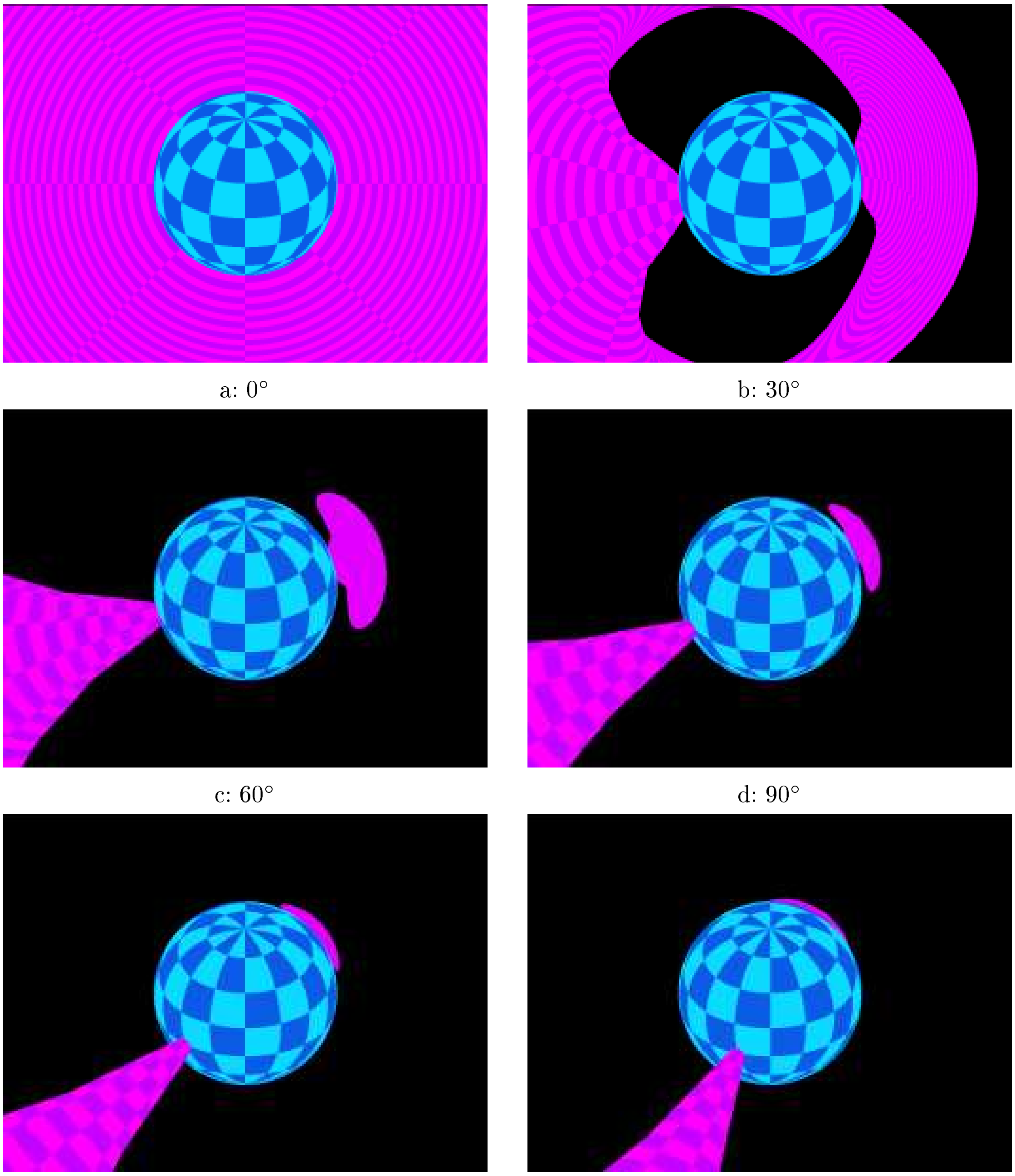


Abb. A.6: Neutronenstern ($M = 0$) mit einer Akkretionssäule.



a: 0° b: 30°

c: 60° d: 90°

e: 120° f: 150°

Abb. A.7: Neutronenstern ($M = 1$) mit einer Akkretionssäule.

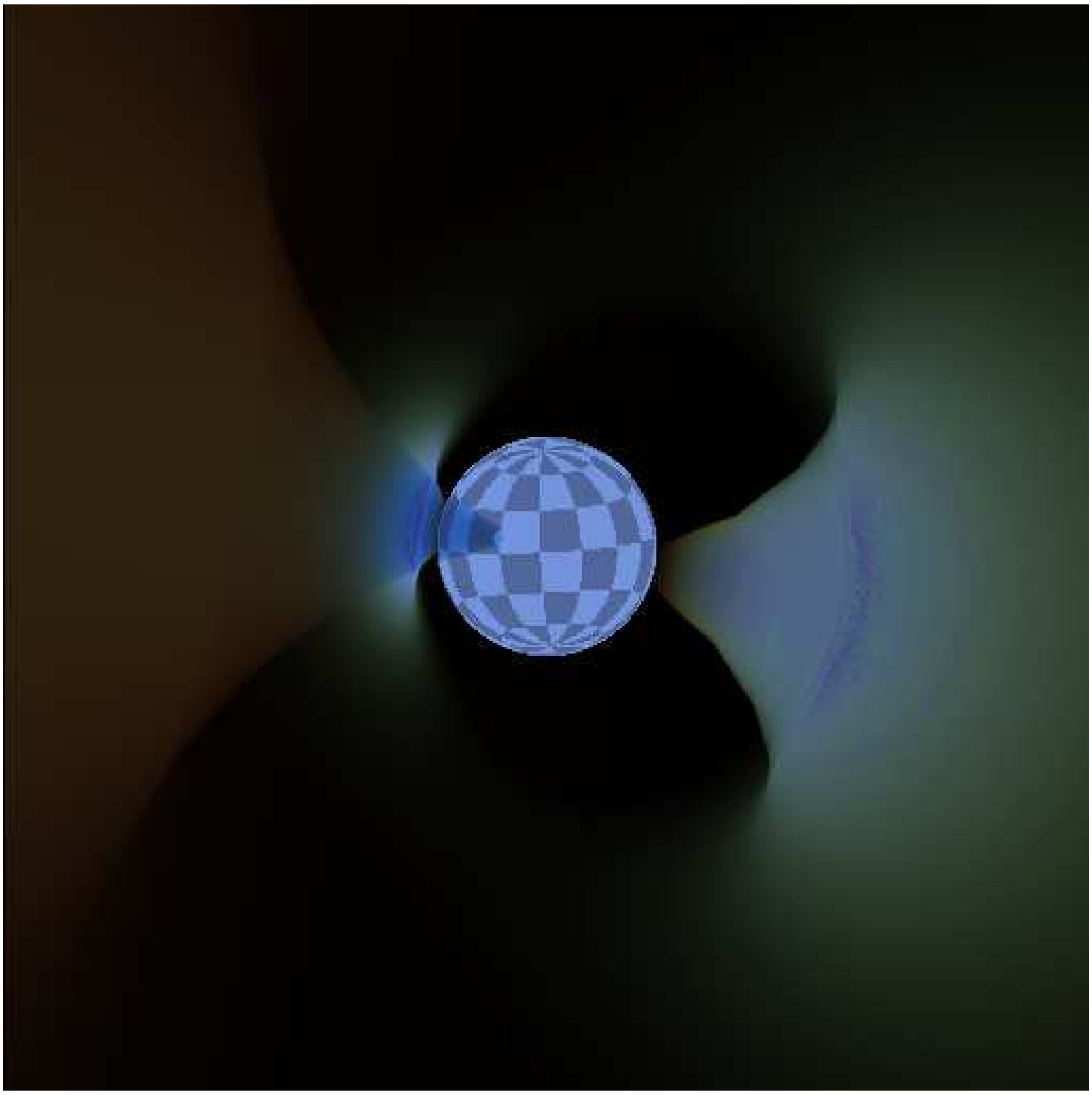


Abb. A.8: Neutronenstern mit zwei aus frei fallendem selbstleuchtendem Gas bestehenden Akkretionssäulen.

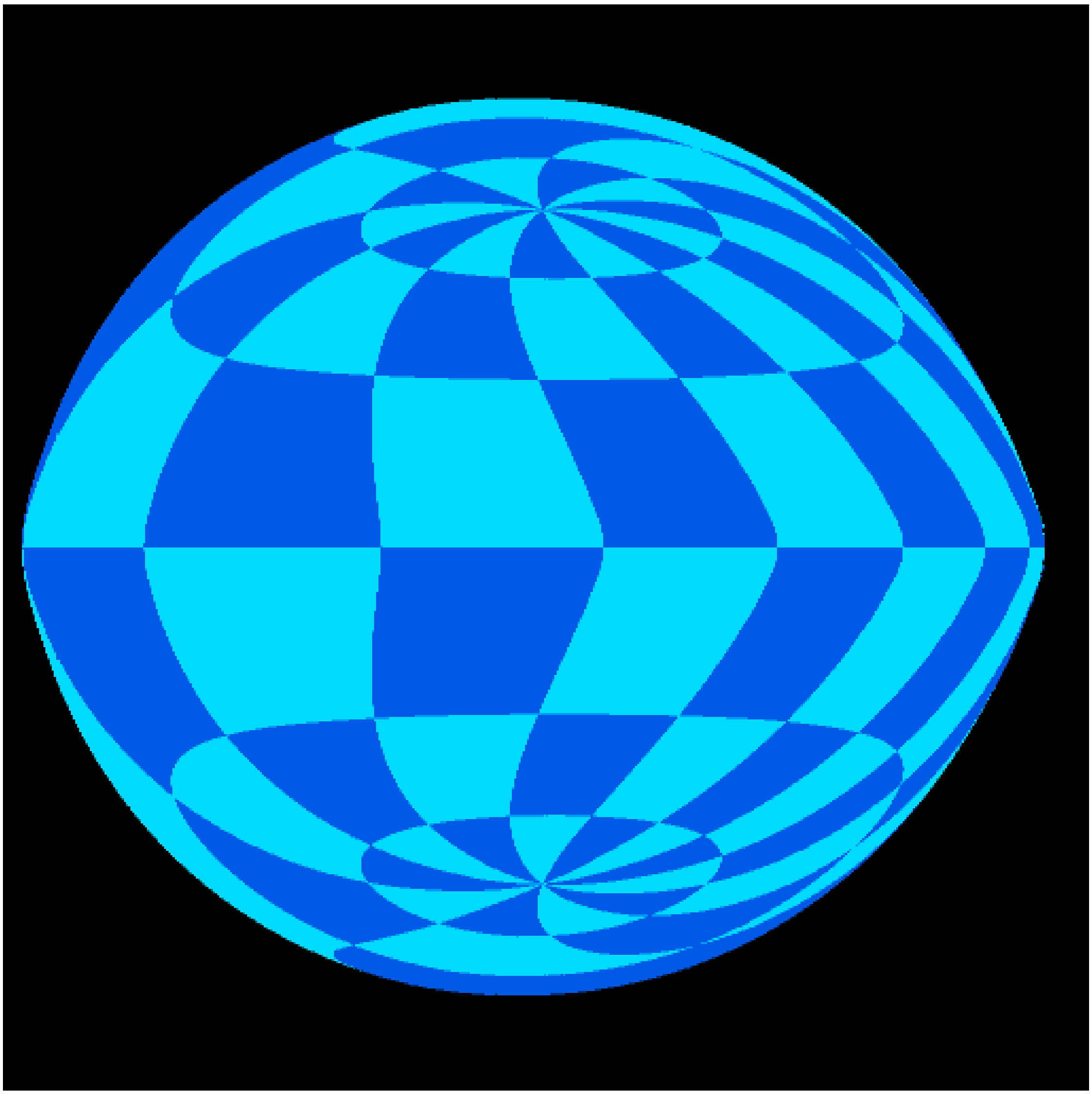
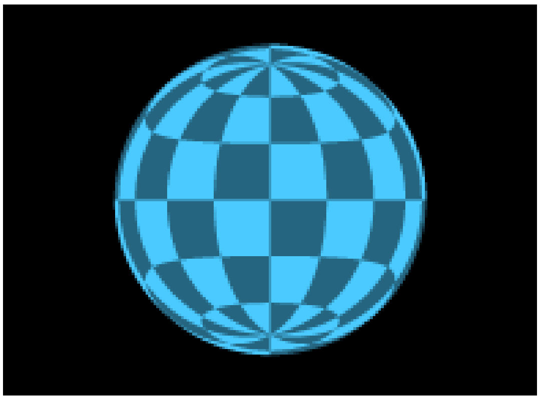
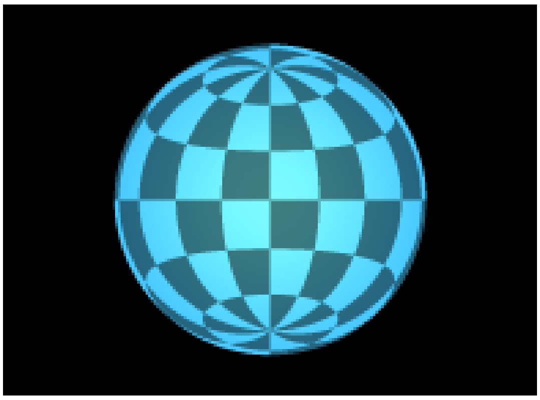


Abb. A.9: rotierender Neutronenstern

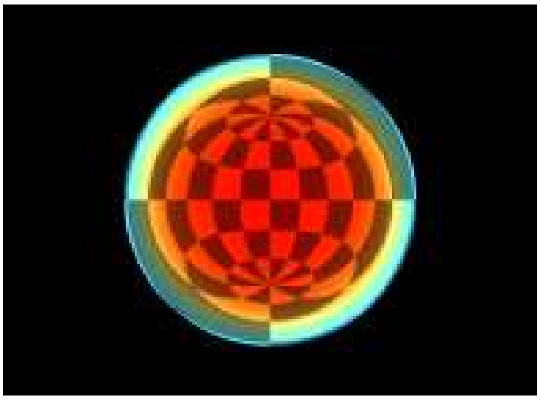


a: $\tau = 0$

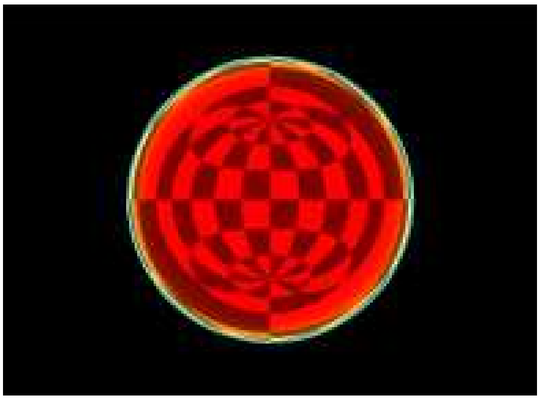


b: $\tau = 10$

c: $\tau = 20$



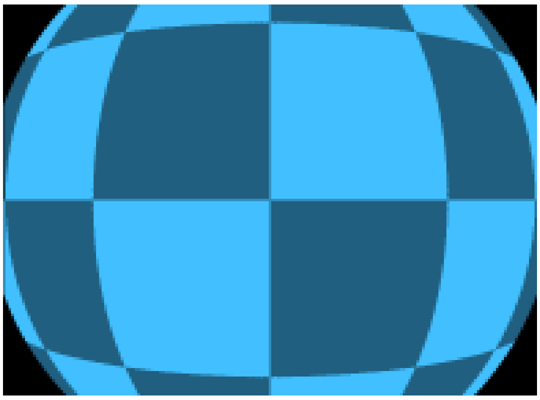
d: $\tau = 30$



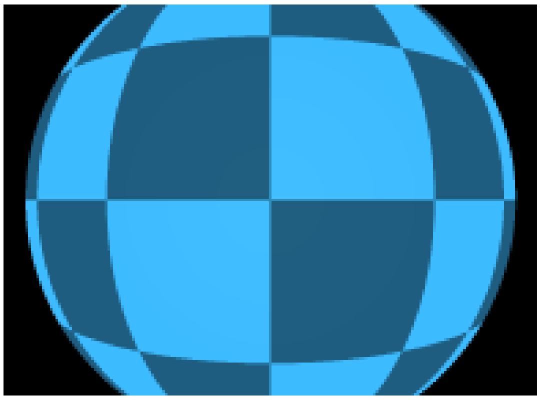
e: $\tau = 40$

f: $\tau = 50$

Abb. A.10: Gravitationskollaps eines Neutronensterns mit der Masse $M = 1$ von einem entfernten Beobachter gesehen.



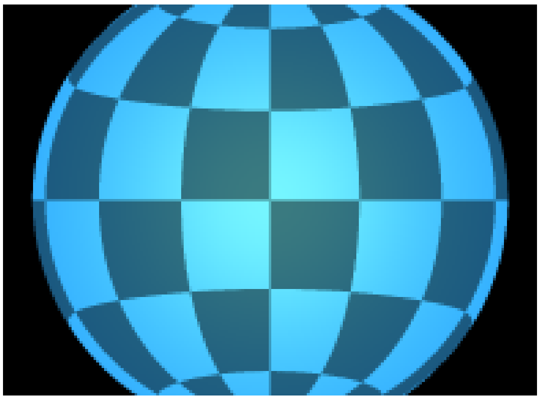
a: $\tau = 0$, $r = 6.0$



b: $\tau = 4.00$, $r = 5.77$

c: $\tau = 6.00$, $r = 5.49$

d: $\tau = 8.24$, $r = 5.0$



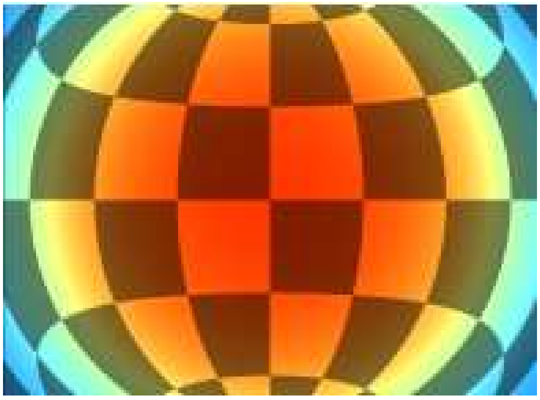
e: $\tau = 11.3$, $r = 4.0$

f: $\tau = 13.36$, $r = 3.0$

Abb. A.11: Gravitationskollaps eines Neutronensterns mit der Masse $M = 1$ von einem mitfallenden Beobachter gesehen. Zu Beginn des Kollapses hat der Neutronenstern einen Radius von $4M$, der Beobachter sitzt bei $6M$. Die Sternoberfläche und der Beobachter beginnen zur Beobachter-Eigenzeit $\tau = 0$ frei zum Sternzentrum hin zu fallen. Die angegebene r-Koordinate ist die des Beobachters.

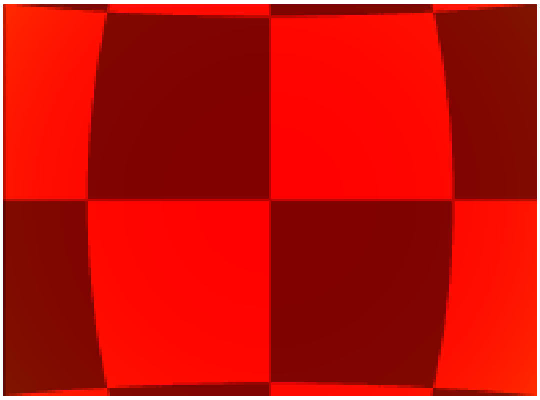
g: $\tau = 14.16$, $r = 2.5$

h: $\tau = 14.82$, $r = 2.0$

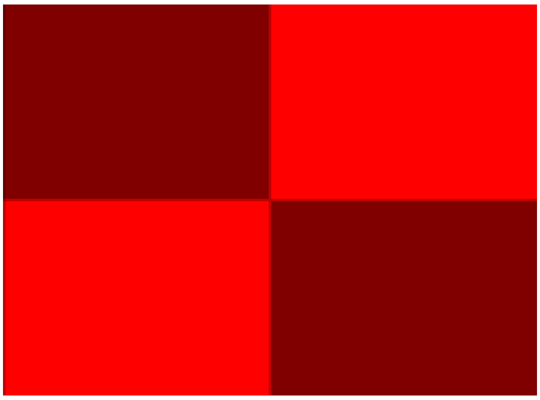


i: $\tau = 15.38$, $r = 1.5$

j: $\tau = 15.82$, $r = 1.0$



k: $\tau = 16.15$, $r = 0.5$



l: $\tau = 16.32$, $r = 0.04$

Danksagung

Ich möchte mich hier bei Prof. Dr. H.-R. Trebin bedanken, der mir diese Arbeit ermöglicht hat, bei Prof. Dr. H. Ruder von der Theoretischen Astrophysik Tübingen, der mich meinen Spieltrieb ungebremst austoben ließ, bei Ute Kraus und Joachim Heimberger für die gute Zusammenarbeit, sowie bei allen Institutsmitgliedern, die mir beim Kampf gegen die Rechner immer hilfreich zur Seite standen.